Secretaria de Educação do Estado de Goiás

Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás - Dr. César Toledo

DESCRITORES DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Teoria e Problemas

Autor: Prof. Dr. Jefferson dos Santos e Silva

Goiás

2021

Descritores de Matemática: Teoria e Problemas

CEPMG - DR. CÉSAR TOLEDO

2021

Descritores de Matemática por Temas no Ensino Médio

ESPAÇO E FORMA:

D_1 Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D_2 Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D_3 Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

D_4 Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.

D_5 Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

D_6 Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

D_7 Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

D_8 Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

D_9 Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

D_{10} Reconhecer, dentre as equações do $2^{\underline{o}}$ grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

GRANDEZAS E MEDIDAS:

D_{11} Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D_{12} Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D_{13} Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

NÚMEROS E OPERAÇÕES/ ÁLGEBRA E FUNÇÕES:

D_{14} Identificar a localização de números reais na reta numérica.

D_{15} Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

D_{16} Resolver problema que envolva porcentagem.

D_{17} Resolver problema envolvendo equação do 2º grau

D_{18} Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.

D_{19} Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.

D_{20} Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

D_{21} Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

D_{22} Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral.

D_{23} Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes.

D_{24} Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico.

D_{25} Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau.

D_{26} Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.

D_{27} Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

D_{28} Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

D_{29} Resolver problema que envolva função exponencial.

D_{30} Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

D_{31} Determinar a solução de um sistema linear associando-o à uma matriz.

D_{32} Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.

D_{33} Calcular a probabilidade de um evento.

TRATAMENTO DE INFORMAÇÃO:

D_{34} Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

D_{35} Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

É no conhecimento que conseguímos nos libertar das amarras da escravidão. Deseje o conhecimento e faça de você uma pessoa que propague conhecimento. Somente assim, podemos transformar as pessoas ao nosso redor.

Prefácio

Por muitas vezes fui um crítico cego dos descritores da matemática. Criticava, pois não conhecia intimamente. Com o passar do tempo notei que os conhecimentos explorados pelos descritores são básicos. Tais conhecimentos são indispensáveis para a formação discente. Hoje, vejo que não podemos aceitar que um aluno deixe o ensino médio sem o domínio de uma boa porcentagem dos conteúdos tratados nesse livro.

Todo conhecimento que está neste livro só terá valor se você se empenhar em realizar todas as atividades. No final desse processo, espero que o seu conhecimento esteja mais aprofundado nos tópicos abordados.

Sumário

Introdução

Os descritores de matemática no ensino médio são habilidades que esperamos que o discente alcance no final dos três anos de permanência no colégio. Este livro associa a cada descritor, teoria e problemas, afim de se tornar o material completo nessa discussão.

O livro é formado por quatro capítulos: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações e Tratamento de Informação. Cada capítulo é subdividido em seções que trata cada descritor associado. Para cada descritor temos subseções que apresentam teoria e problemas. São mais de 300 exercícios e mais de 100 exercícios resolvidos.

Os problemas são de um nível fácil e com crescente em dificuldade. Aqui referencio o trabalho do professor Warles e seu blog https://profwarles.blogspot.com. O trabalho realizado por esse professor é fundamental e tem ajudado muito o ensino da matemática. Boa parte dos problemas que apresentamos aqui foram retirados blog supracitado. Tais problemas são oriundos de avaliações externas tais como: SAEB, SAEP, SAEGO, GAVE, etc. Apresentamos em alguma seções problemas de provas como ENEM, FUVEST e PUC;

Enfim, esse livro é completo e soma com os trabalhos do professor Warles no sentido que completam.

Capítulo 1

Espaço e Forma

Neste primeiro capítulo vamos discutir sobre os descritores associados ao tema espaço e forma. Toda abordagem realizada a seguir é feita por meio de uma fundamentação teórica seguida de problemas relacionados. Estes problemas possuem o mesmo nível de dificuldade cobrada nas provas de avaliação externa.

1.1 Descritor D_1 - Teoria e Problemas

O descritor D_1 está relacionado semelhança e proporcionalidade. Discutiremos primeiramente as semelhanças de triângulos e posteriormente, estenderemos a semelhança para polígonos em gerais.

1.1.1 Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes quando os ângulos correspondentes possuem medidas iguais.

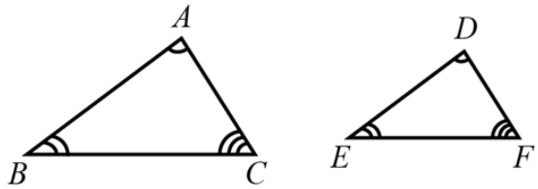


Figura 1.1: ΔABC e ΔDEF são semelhantes

Assim, vale as igualdades

$$A\widehat{B}C = D\widehat{E}F \quad B\widehat{C}A = E\widehat{F}D \quad C\widehat{A}B = F\widehat{D}E$$

Uma consequência da semelhança dos triângulos ΔABC e ΔDEF é a proporcionalidade dos lados correspondentes

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k$$

O valor k é chamado de **constante de proporcionalidade** ou **razão de semelhança**. Desta forma, dois triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes se, e somente se, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

Os casos de semelhanças podem ser analisados por meio de três casos, de modo que se qualquer um dos casos for satisfeitos, os triângulos analisados são semelhantes. Esses casos são caminhos alternativos para a verificação da semelhança.

- **Caso Ângulo - Ângulo (AA)**: Caso dois triângulos apresentem dois ângulos correspondentes e congruentes são tidos como semelhantes.

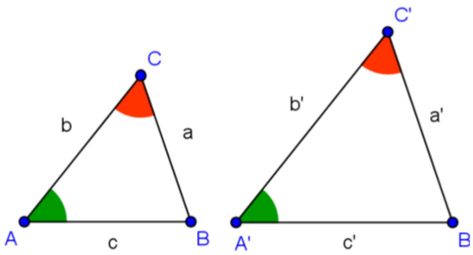


Figura 1.2: ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são semelhantes

- **Caso Lado - Lado - Lado (LLL)**: Caso dois triângulos possuam três lados correspondentes proporcionais são classificados de semelhantes.

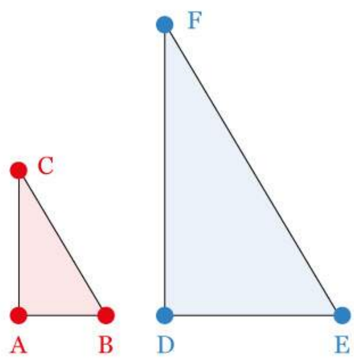


Figura 1.3: ΔABC e ΔDEF são semelhantes

- **Caso Lado - Ângulo - Lado (LAL)**: Caso dois triângulos tenham pares de lados proporcionais e o ângulo entre eles for de mesma medida são considerados semelhantes.

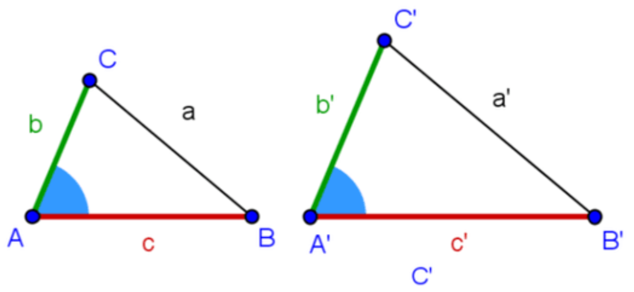
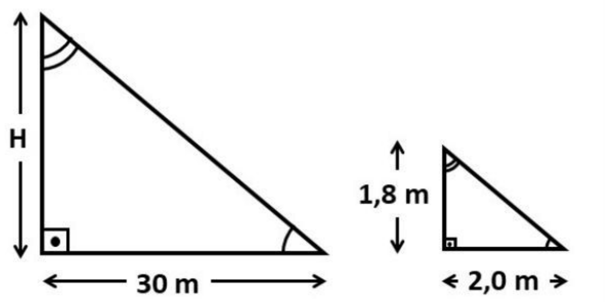


Figura 1.4: ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são semelhantes

Exemplo 1.1 *Os triângulos abaixo são semelhante no caso (AA). Qual o valor da medida H?*

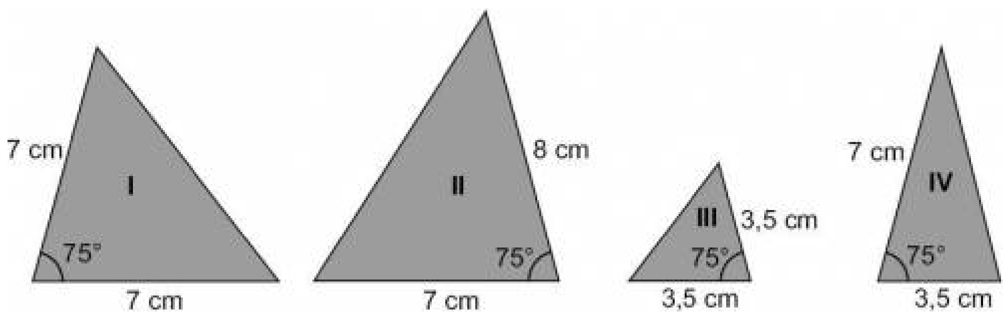


a) 18 m *b) 27 m* *c) 36 m* *d) 54 m* *e) 72 m*

Resolução 1 *Se os triângulos são semelhantes, então os lados correspondentes são proporcionais. Portanto*

$$\frac{H}{1,8} = \frac{30}{2} \quad \textit{implica que} \quad 2H = 54 \quad \textit{logo,} \quad H = 27 \ m$$

Exemplo 1.2 *Observe os triângulos desenhados abaixo.*

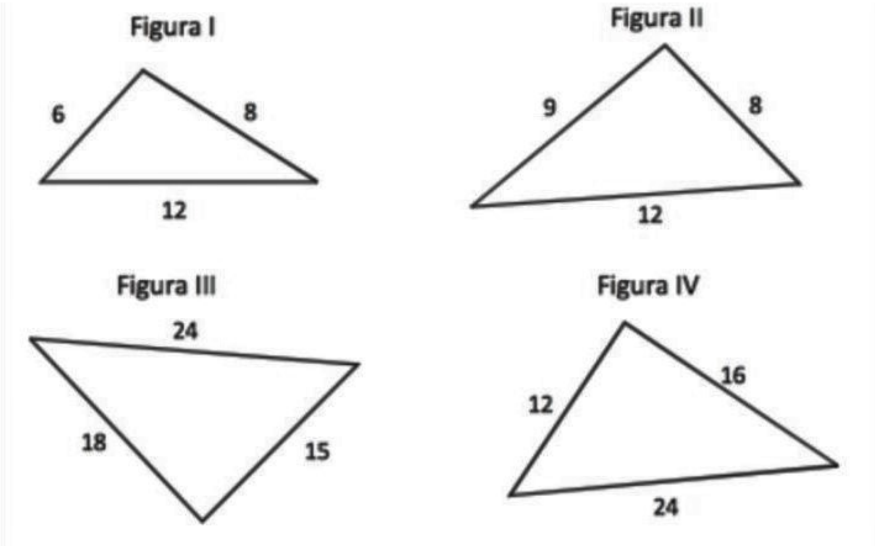


Quais desses triângulos são semelhantes?

a) I e III *b) I e IV* *c) II e III* *d) II e IV* *e) III e IV*

Resolução 2 *Note que os triângulos I e III são semelhantes pelo caso (LAL), uma vez que os dois lados de medida 7 cm no triângulo I são proporcionais aos lados de medida 3,5 cm no triângulo III e o ângulo compreendido entre esses lados, para ambos triângulos, possui e a mesma medida 75°.*

Exemplo 1.3 *Entre as figuras abaixo, as que representam triângulos semelhantes são*



a) I e II *b) I e III* *c) I e IV* *d) II e III* *e) III e IV*

Resolução 3 *Note que os triângulos I e IV são semelhantes pelo caso (LLL) uma vez que se as medidas dos lados do triângulo I forem multiplicadas por 2, obtemos as medidas dos lados do triângulo IV.*

A semelhança de polígonos é uma extensão do que realizamos para a semelhança de triângulos. Dizemos que dois polígonos são semelhantes quando eles possuem o mesmo número de lados e satisfazem as condições:

- Ângulos internos iguais;
- Lados correspondentes proporcionais;
- Consequentemente, a razão entre dois lados correspondentes é sempre a mesma.

O valor dessa razão também é chamado de constante de proporcionalidade ou razão de semelhança.

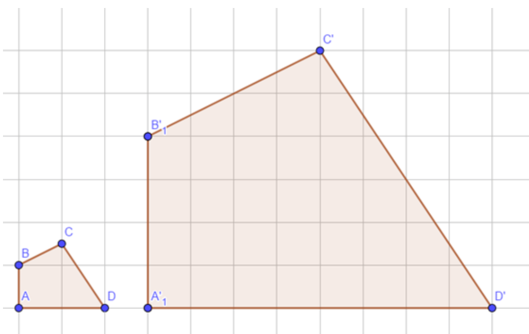
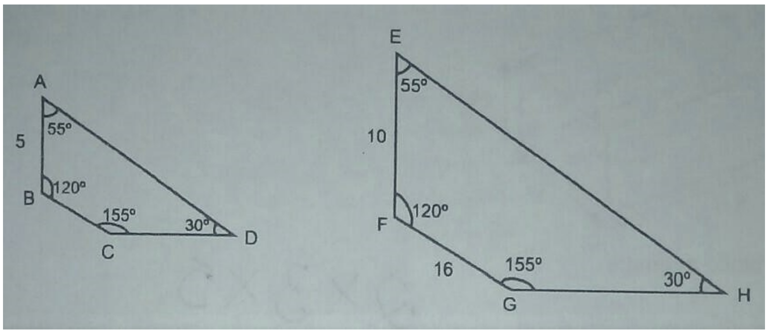


Figura 1.5: Polígonos semelhantes

Uma consequência importante sobre polígonos semelhantes e, logicamente, válido para os triângulos é:

Se dois polígonos são semelhantes com razão de semelhança k, então os perímetros são proporcionais com razão k e as áreas são proporcionais com razão k^2.

Exemplo 1.4 *O quadrilátero ABCD é semelhante ao quadrilátero EFGH.*



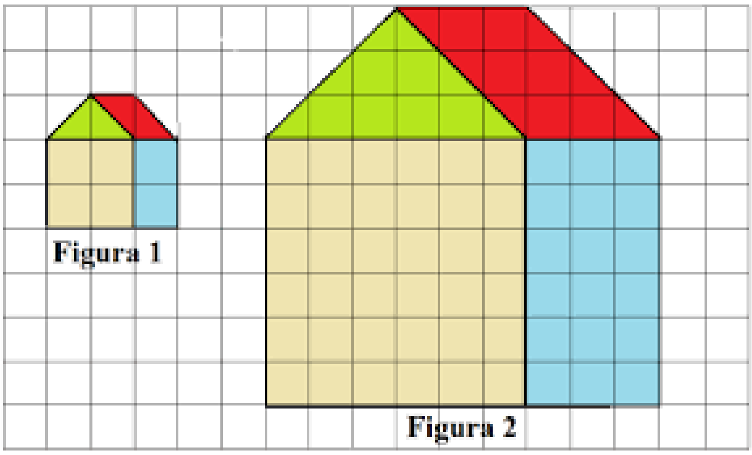
A medida do lado BC, em centímetros, é

a) 8 *b) 11* *c) 31* *d) 32* *e) 40*

Resolução 4 *Se os quadriláteros são semelhantes, então os lados correspondentes são proporcionais. Portanto, denotando a medida de BC por x, temos*

$$\frac{x}{16} = \frac{5}{10} \quad \textit{implica que} \quad 10x = 80 \quad \textit{logo,} \quad x = 8$$

Exemplo 1.5 *Duas casinhas desenhadas numa malha quadriculada de são representadas nas Figuras 1 e 2 abaixo.*



Se a Figura 2 é uma ampliação da Figura 1, qual a área da Figura 2?

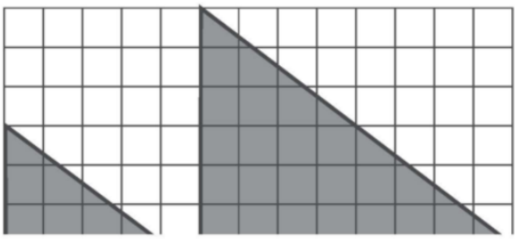
Resolução 5 *Esse problema pode ser resolvido sem a necessidade de usar semelhança, mas o faremos por meio da semelhança de polígonos. Começamos a observar a proporcionalidade das partes que compõem a Figura 1 e Figura 2.*

Cor	Proporcionalidade da Fig. 2 p/ Fig. 1	Proporcionalidade da área
VERDE	3	$3^2 = 9$
BEGE	3	$3^2 = 9$
AZUL	3	$3^2 = 9$
VERMELHA	3	$3^2 = 9$

Assim, a área da figura 2 é nove vezes a área da figura 1. Se a figura 1 é composta por 10 quadradinhos da malha, então a figura 2 é composta por $9 \times 10 = 90$ *quadradinhos. Portanto, a área da figura 2 é 90 unidades de área.*

1.1.2 Problemas Propostos

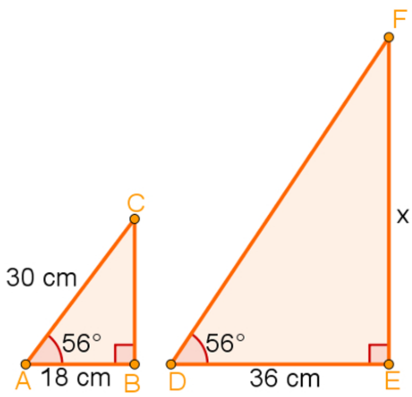
1. Observe os dois triângulos semelhantes, na malha quadriculada abaixo:



A área do triângulo maior é correspondente a quantas vezes a área do triângulo menor?

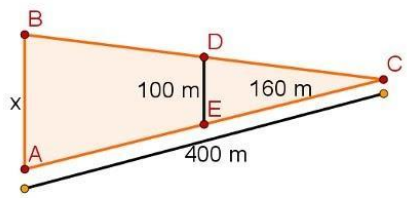
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

2. Qual o valor de x, em centímetros, nos triângulos a seguir?



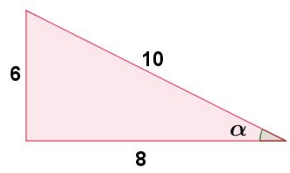
a) 20 b) 24 c) 48 d) 49 e) 50

3. Na imagem a seguir, é possível perceber dois triângulos que compartilham parte de dois lados. Sabendo que os segmentos BA e DE são paralelos, qual a medida de x em metros?

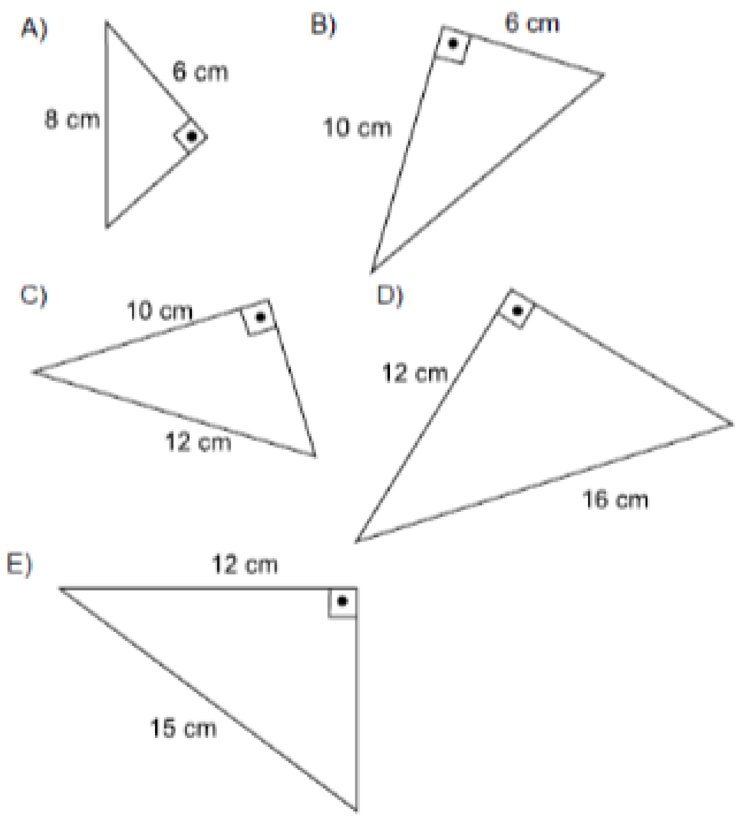


a) 210 b) 220 c) 230 d) 240 e) 250

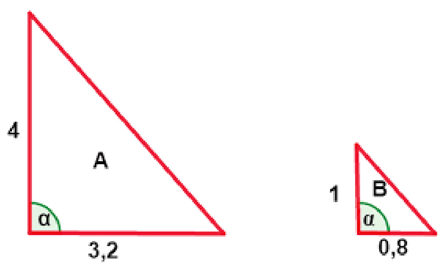
4. Observe o triângulo abaixo.



Qual é o triângulo semelhante ao triângulo dado?



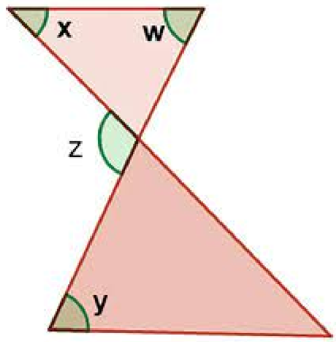
5. Observe os triângulos A e B a seguir:



Sabendo que os triângulos A e B são semelhantes, a constante de proporcionalidade k que gerou o triângulo B é:

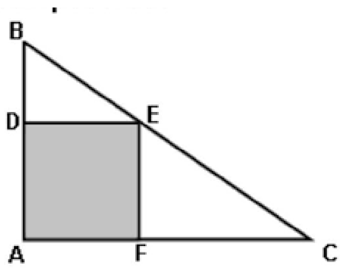
a) 0,25 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

6. Na figura a seguir temos dois triângulos semelhantes nos quais os ângulos x e y medem respectivamente 45° e 55°. Calcule a medida dos ângulos w e z, respectivamente.



a) 55° e 45° b) 55° e 80° c) 45° e 100° d) 55° e 100° e) 80 e 100°

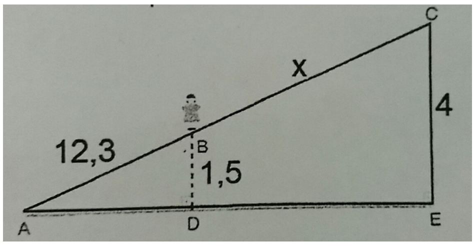
7. Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, AB=1 e AC=3. Quanto mede o lado do quadrado?



a) 0,70 b) 0,75 c) 0,80 d) 0,85 e) 0,90

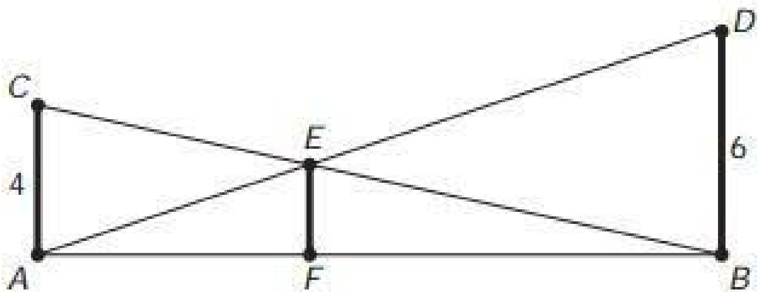
8. Os três lados de um triângulo ABC medem, respectivamente, 6 cm, 15 cm e 16 cm. Determine os lados de um triângulo $\Delta A'B'C'$ semelhante a ΔABC, sabendo que a razão de semelhança deΔABC para o $\Delta A'B'C'$ é igual a 4.

9. Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3 metros sobre a rampa está a 1,5 metros de altura em relação ao solo. Quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa?



a) 20 b) 20,5 c) 21 d) 32,8 e) 33

10. O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento, em metros, da haste EF?

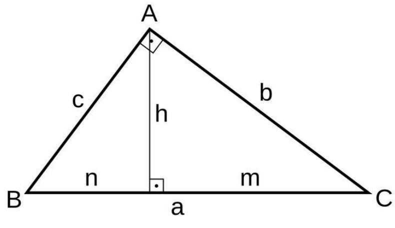
a) 1 b) 2 c) 2,4 d) 3 e) $2\sqrt{6}$

1.2 Descritor D_2 - Teoria e Problemas

O descritor D_2 está relacionado a relações métricas no triângulo retângulo. Vamos inicialmente apresentar as relações métricas em um triângulo retângulo e, posteriormente, aplicá-las.

1.2.1 Relações métricas no triângulo retângulo

As relações métricas de um triângulo retângulo são equações que relacionam as medidas do triângulo retângulo. Os elementos de um triângulo retângulo estão apresentados abaixo:



Sendo:

a: medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º)

b: cateto

c: cateto

h: altura relativa à hipotenusa

n: projeção do cateto c sobre a hipotenusa

m: projeção do cateto b sobre a hipotenusa

Neste material, não estamos interessados na demonstração das relações que são oriundas do triângulo retângulo acima. Ressaltamos que todas as relações que são descritas abaixo são obtidas por meio de semelhança de triângulos. Vamos destacar quatro relações trigonométricas no triângulo retângulo:

RELAÇÕES MÉTRICAS: Vale as relações métricas:

(1) $a \cdot h = b \cdot c$ **(área de** ΔABC**)**

(2) $h^2 = m \cdot n$

(3) $c^2 = a \cdot n$

(4) $b^2 = a \cdot m$

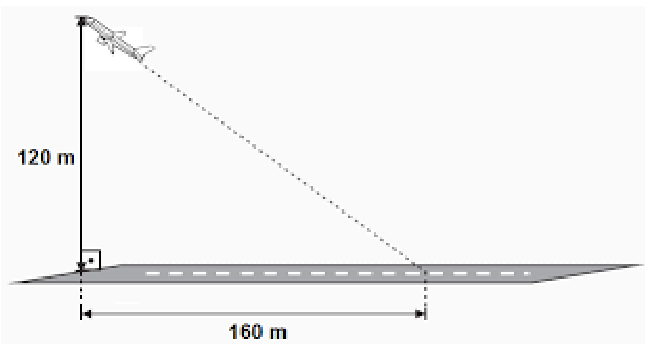
A relação mais famosa num triângulo retângulo é o bem creditado **Teorema de Pitágoras**.

TEOREMA DE PITÁGORAS: A soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Essas serão as relações que iremos aplicar nos problemas propostos. Vamos resolver alguns exemplos:

Exemplo 1.6 *No processo de decolagem, um avião saiu do chão sob um determinado ângulo e se manteve em linha reta até atingir a cabeceira da pista, conforme o desenho abaixo.*



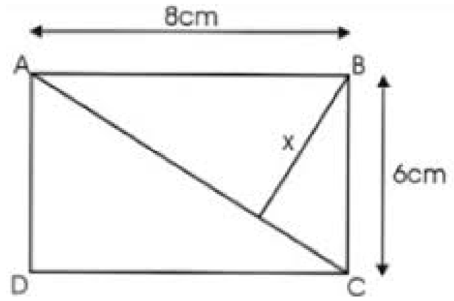
De acordo com esse desenho, quantos metros esse avião percorreu do momento em que saiu do chão até o momento em que atingiu a cabeceira da pista de decolagem?

a) 200 b) 280 c) 400 d) 9600 e) 40000

Resolução 6 *A quantidade em metros da distância percorrida pelo avião é a hipotenusa do triângulo retângulo desenhado. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, pois conhecemos os dois catetos. Assim,*

$$a^2 = (120)^2 + (160)^2 = 40000 \quad \textit{implica que} \quad a = 200$$

Exemplo 1.7 *Na figura abaixo, ABCD é um retângulo e AC sua diagonal.*



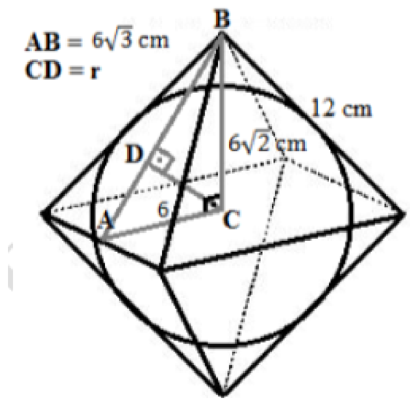
Qual é a menor distância x, em centímetros, do vértice B até a diagonal?

a) 4 b) 3,6 c) 4,8 d) 5 e) 10

Resolução 7 *A menor distância x é obtida quando o segmento que une o vértice B a diagonal AC é ortogonal (forma um ângulo de 90 °). Nosso intuito é usar a relação métrica (1). Para isso, vamos precisar da hipotenusa que é obtida usando o Teorema de Pitágoras. Fazendo isso, obtemos que para $c = 8$ e $b = 6$, temos $a = 10$. Agora, usando a relação (1)*

$$a \cdot h = b \cdot c \quad \textit{implica que} \quad 10h = 6 \cdot 8 \quad \textit{logo,} \quad h = 4,8$$

Exemplo 1.8 *Uma esfera de raio "r" inscrita num octaedro regular de aresta 12 cm, conforme a figura:*



O raio "r" da esfera, em centímetros, mede

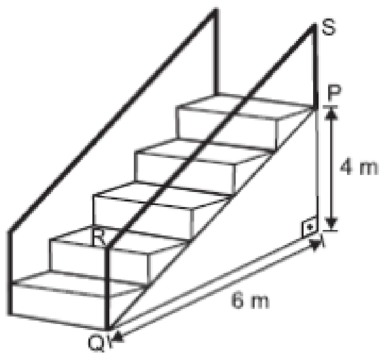
a) 24 *b) 18* *c)* $2\sqrt{6}$ *d)* $6\sqrt{3}$ *e)* $6\sqrt{2}$

Resolução 8 *O procedimento é o mesmo no problema anterior. Considerando o triângulo retângulo* ΔABC*, o raio* r *é a medida* CD*. Aplicaremos a relação (1) com* $c = 6\sqrt{2}$ *e* $b = 6$*. A medida* a *é dada na figura como a medida do segmento* AB*. Portanto,* $a = 6\sqrt{3}$*. Usando a relação (1), com* $r = h$*, temos*

$$a \cdot r = b \cdot c \quad \textit{implica que} \quad (6\sqrt{3})r = 6 \cdot 6\sqrt{2} \quad \textit{logo,} \quad r = \frac{36\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

1.2.2 Problemas Propostos

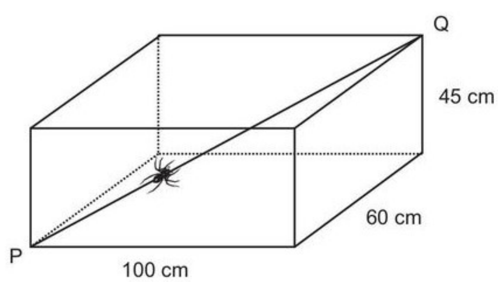
1. A figura abaixo mostra a escada de acesso à casa de Ricardo. O corrimão dessa escada está representado pelo segmento de reta RS que é paralelo ao segmento PQ.



   O comprimento do corrimão dessa escada, em metros, mede aproximadamente

   a) 7 b) 8 c) 10 d) 24 e) 52

2. Uma aranha teceu uma teia que coincide com a diagonal de uma caixa retangular partindo do ponto P em direção ao ponto Q, conforme o desenho abaixo.



   Qual é o comprimento, em cm, dessa teia?

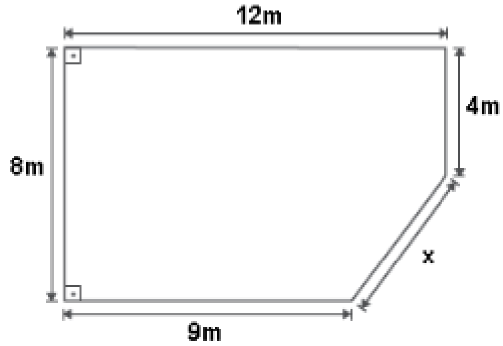
   a) 105 b) 120 c) 125 d) 160 e) 205

3. Em um triângulo retângulo ABC, retângulo em Â, a medida de um cateto é 30 cm e a medida de AH é 24 cm, onde AH é a altura do triângulo em relação

ao vértice Â. Qual a medida a da hipotenusa e a medida do outro cateto, são respectivamente:

a) 50 e 40 b) 35 e 30 c) 40 e 35 d) 45 e 40 e) 50 e 45

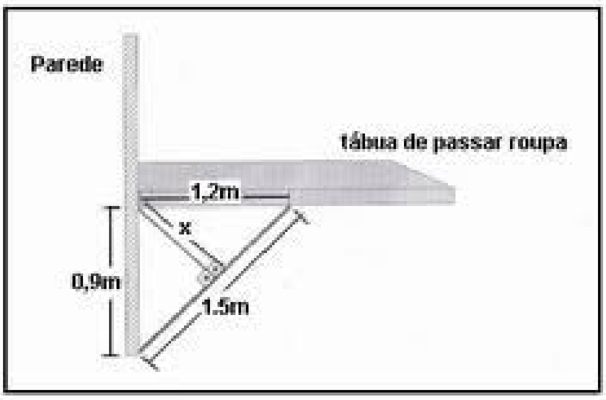
4. O desenho abaixo representa a planta baixa de um terreno no qual o proprietário deseja colocar um portão de comprimento x.



Qual é a medida do comprimento x, em metros, desse portão?

a) 2,64 b) 3,74 c) 5 d) 8 e) 33

5. Um marceneiro fixou uma tábua de passar roupa perpendicular a uma parede, a 0,90 metros do chão. Para aumentar a resistência, ele colocou dois apoios, como mostra a figura abaixo.



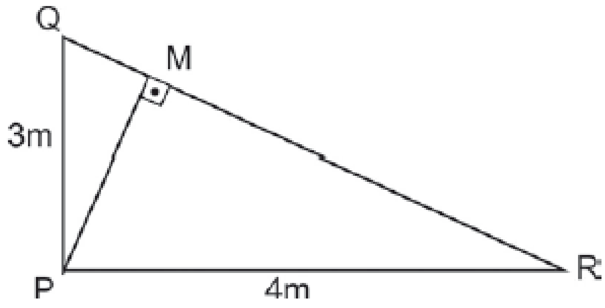
O comprimento "x" do apoio menor é

a) 0,42 b) 0,48 c) 0,72 d) 0,75 e) 0,87

6. Duas pessoas, partindo de um mesmo local, caminham em direções ortogonais. Uma pessoa caminhou 12 metros para o sul, a outra, 5 metros para o leste. Qual a distância, em metros, que separa essas duas pessoas?

a) 7 b) 13 c) 17 d) 60 e) 119

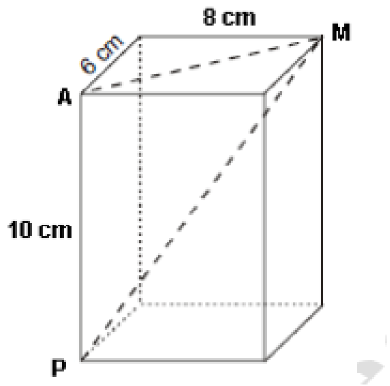
7. Para reforçar a estrutura PQR, retângulo em P, foi colocada uma trave PM, como mostra a figura abaixo.



Qual a medida do comprimento, em metros, da trave PM?

a) 1 b) 2,4 c) 3 d) 3,5 e) 5

8. O sólido representado na figura é um prisma reto retangular, e tem dimensões medindo 6 cm, 8 cm e 10 cm.



Qual é, em centímetros, a soma das medidas dos segmentos AM e MP?

a) 20 b) $10\sqrt{2}$ c) $10(1+\sqrt{2})$ d) 24 e) 30

1.3 Desdritor D_3 - Teoria e Problemas

O descritor D_3 está relacionado as planificações de poliedros e corpos redondos. Nesta parte dizemos o significado da planificação de um poliedro ou corpos redondos e seguiremos para os problemas propostos.

1.3.1 Planificações

A planificação de um sólido geométrico é a apresentação de todas as formas que constituem sua superfície em um plano, ou seja, em duas dimensões. Essas planificações são usadas de várias maneiras, como para calcular a área da superfície de um sólido. Vejamos as planificações de alguns sólidos especiais:

- **Prismas**: Os prismas são sólidos geométricos formados por duas bases, que são polígonos quaisquer congruentes e paralelos, e por faces laterais que sempre são paralelogramos.

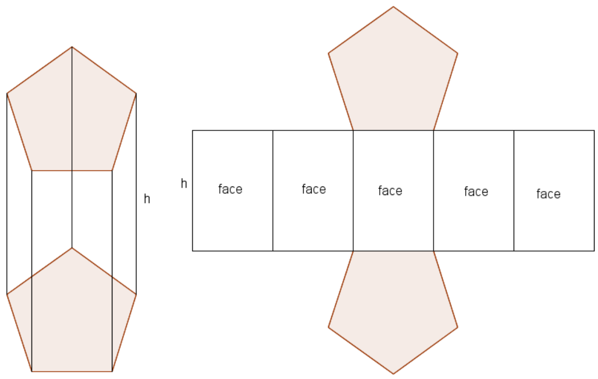


Figura 1.6: Planificação de um prisma de base pentagonal

- **Pirâmides**: s pirâmides são sólidos formados por uma base, que pode ser qualquer polígono, e por faces laterais que são obrigatoriamente triângulos.

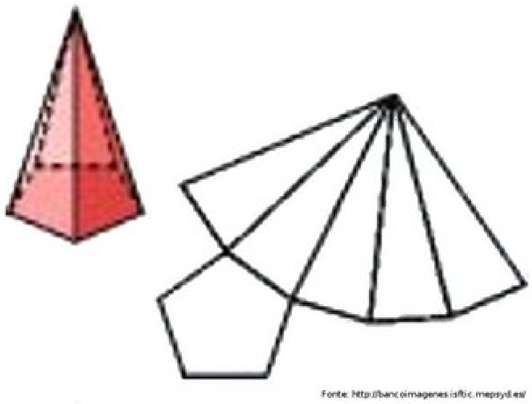


Figura 1.7: Planificação de uma pirâmide de base pentagonal

- **Cilindros**: Os cilindros são sólidos geométricos cujas bases são dois círculos paralelos e congruentes. Em sua planificação, temos dois círculos e um retângulo.

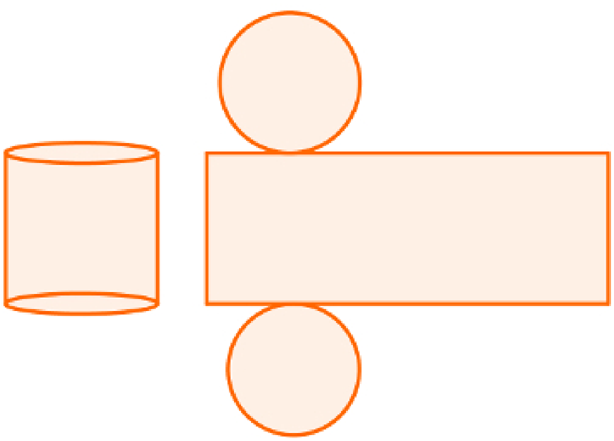
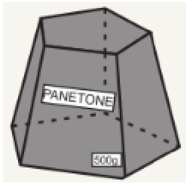


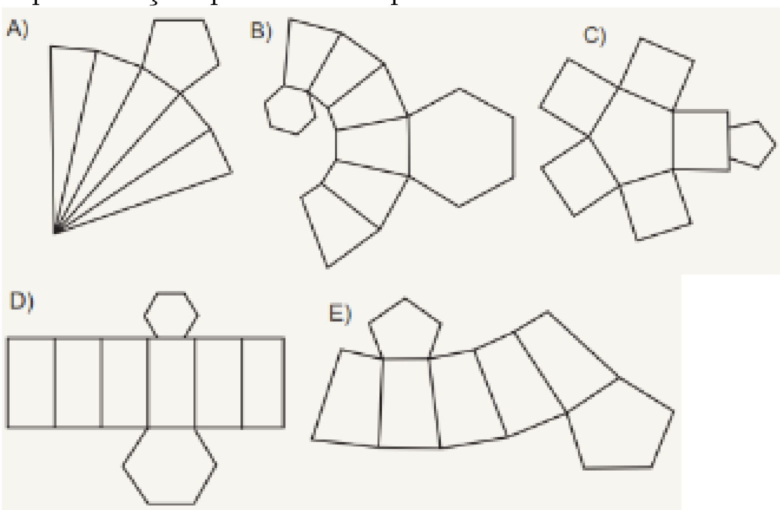
Figura 1.8: Planificação de um cilindro

1.3.2 Problemas Propostos

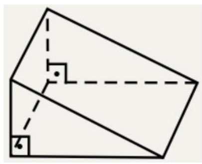
1. Aline comprou um panetone que veio em uma embalagem no formato de um tronco de pirâmide pentagonal, conforme a representada no desenho abaixo.



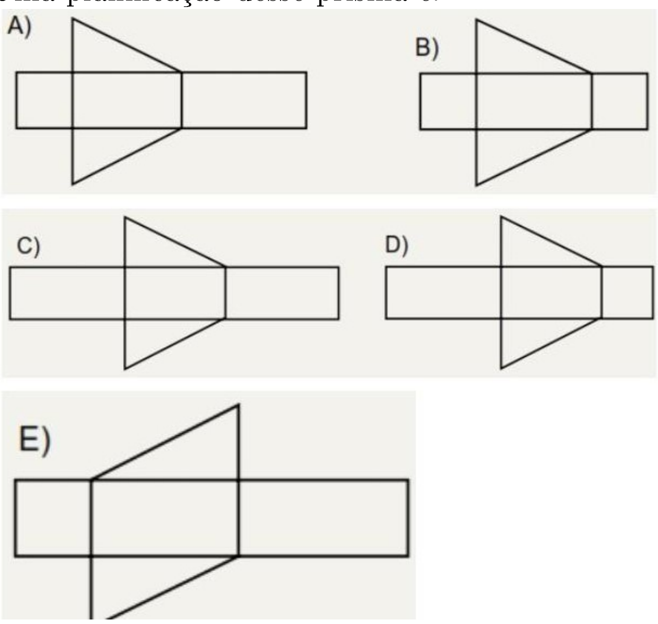
A planificação que melhor representa esse sólido é:



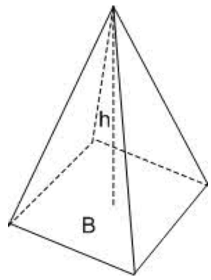
2. O poliedro desenhado abaixo é um prisma reto cuja base é um triângulo retângulo.



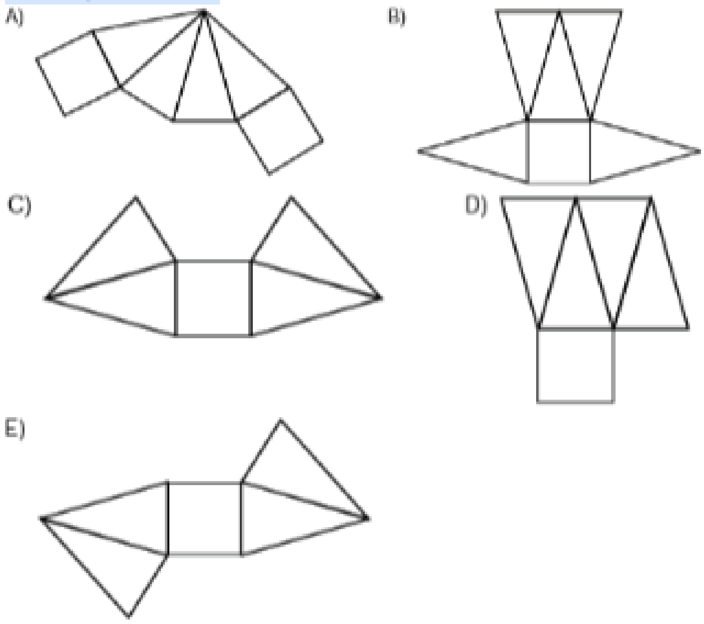
Uma planificação desse prisma é:



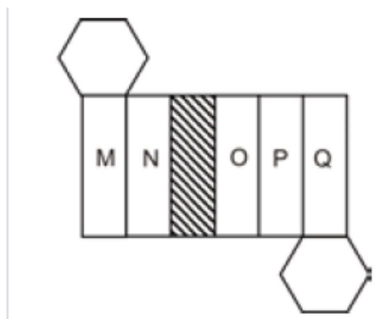
3. Observe a pirâmide de base quadrada representada na figura abaixo.



Qual das figuras abaixo corresponde à planificação dessa pirâmide?



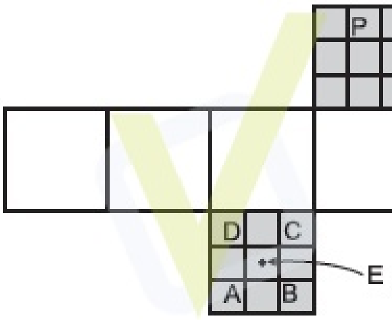
4. A figura abaixo representa a planificação de uma embalagem com a forma de um prisma de base hexagonal.



Ao montarmos essa embalagem, qual face ficará oposta à face pintada?

a) M b) N c) O d) P e) Q

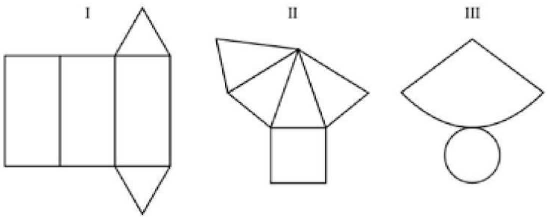
5. Dois pontos na superfície de um cubo são opostos se o segmento de reta que os liga passa pelo centro do cubo. Na figura vemos uma planificação de um cubo, na qual as faces destacadas em cinzento foram divididas em nove quadradinhos iguais.



Quando o cubo for montado, qual será o ponto oposto ao ponto P?

a) A b) B c) C d) D e) E

6. Considere as figuras abaixo:



As figuras I, II e III correspondem, respectivamente, às planificações de:

a) prisma, cilindro, cone.

b) pirâmide, cone, cilindro.

c) prisma, pirâmide, cone.

d) pirâmide, prisma, cone.

e) pirâmide, cone, prisma.

1.4 Descritor D_4 - Teoria e Problemas

O descritor D_4 está relacionado ao uso da Relação de Euler. Tal relação faz uma relação entre os números de faces, vértices e arestas de um poliedro. Apresentamos a definição de cada um dos elementos listados e da relação de Euler.

1.4.1 A Relação de Euler

Antes de apresentar a **Relação de Euler** vamos conceituar os elementos aresta, face e vértice de um poliedro. Os poliedros são formas geométricas espaciais que apresentam todas as faces planas. Os elementos de um poliedro são:

- **Face**: É a superfície plana do poliedro.
- **Arestas**: É a interseção de duas faces. Isto é, são as linhas resultantes do encontro de duas faces.
- **Vértices**: É o encontro de duas ou mais arestas.

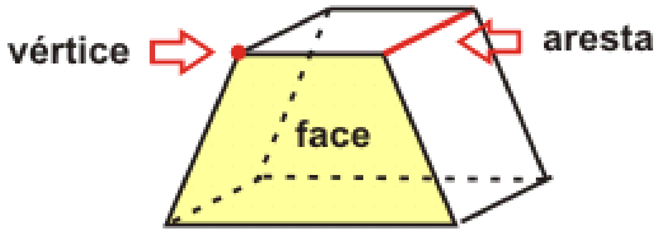


Figura 1.9: Poliedro com 6 faces, 12 arestas e 8 vértices

Note que a figura acima possui número de vértices mais o número de faces igual ao número de arestas mais duas unidades. Isto é válido em todos poliedros e nos dá a seguinte relação:

RELAÇÃO DE EULER: Em todo poliedro vale a relação

$$V + F = A + 2$$

onde: V é o número de vértices, F o número de faces e A o número de arestas.

Outras relações importantes para a resolução de problemas relacionam arestas e faces, arestas e vértices.

RELAÇÕES ADICIONAIS: Em todo poliedro vale a relação

$$\begin{aligned} 2A &= 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots \\ 2A &= 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots \end{aligned}$$

onde: V_n é o número de vértices que recebe n arestas, F_n o número de faces formadas por n arestas, com $n \in \mathbf{N}$ $n \geq 3$.

Exemplo 1.9 *Pela Relação de Euler, tem-se que $F + V = A + 2$, onde F é o número de faces, V o número de vértices e, A o número de arestas. Qual é o número de faces de um poliedro convexo, que tem 9 arestas e 6 vértices?*

a) 3 *b) 4* *c) 5* *d) 6* *e) 7*

Resolução 9 *Pela relação de Euler temos*

$$F + 6 = 9 + 2 \quad \textit{implica que} \quad F = 11 - 6 = 5$$

Exemplo 1.10 *Um poliedro convexo possui 2 faces pentagonais, 5 faces quadrangulares. Qual é o número de arestas desse poliedro?*

a) 40 *b) 38* *c) 30* *d) 19* *e) 15*

Resolução 10 *Para o poliedro em questão, $F_5 = 2$ e $F_4 = 5$. Portanto, pelas relações adicionais, temos*

$$2A = 4 \times 5 + 5 \times 2 \quad \textit{implica que} \quad 2A = 30 \quad \textit{logo} \quad A = 15$$

Exemplo 1.11 *Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares.*

Resolução 11 *Para o poliedro em questão* $F_5 = 3$ *e* $F_3 = x$*, onde* x *fica a determinar. O número de faces desse poliedro é* $F = F_3 + F_5$*, isto é,* $F = x + 3$*. Visto que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares, temos que* $A = 4x$*. Usando as relações adicionais*

$$2A = 3F_3 + 5F_5 \quad \textit{implica que} \quad 8x = 3x + 5 \times 3 \quad \textit{logo} \quad 5x = 15 \quad \textit{portanto} \quad x = 3$$

Desta forma, o número de faces é $F = x + 3 = 3 + 3 = 6$*.*

1.4.2 Problemas Propostos

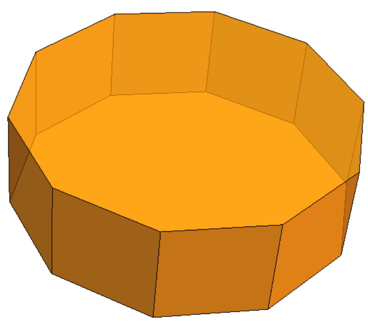
1. Leandro faz coleção de dados. Um desses dados tem o formato de um tetraedro regular, cujas faces são formadas por 4 triângulos equiláteros. O número de vértices desse poliedro é

   a) 18 b) 12 c) 10 d) 6 e) 4

2. Davi construiu com papéis coloridos um poliedro cujo número de arestas é o dobro do número de faces acrescido de 6. O número de vértices é o dobro do número de faces subtraído de 4. Quantos vértices tem esse poliedro?

   a) 30 b) 20 c) 16 d) 12 e) 10

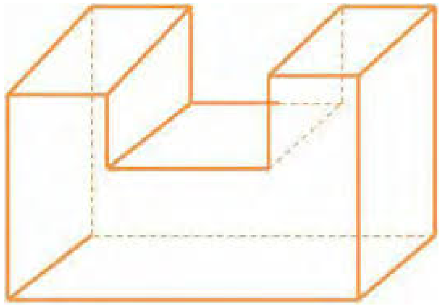
3. Gilberto ganhou uma caixa com a forma indicada no desenho abaixo.



   Quantas arestas possui essa caixa?

   a) 30 b) 20 c) 16 d) 12 e) 10

4. Quantos vértices possui o poliedro abaixo?



a) 20 b) 18 c) 16 d) 12 e) 10

5. Ao manusear um sólido geométrico, Mateus observou que ele era um poliedro convexo formado por duas faces pentagonais e cinco faces quadrangulares. Qual é o número de vértices desse poliedro?
a) 30 b) 25 c) 20 d) 15 e) 10

6. As bases de um prisma reto são formadas por polígonos de n lados. Os números de vértices, faces e arestas desse prisma, nessa ordem, são
a) n, $n-2$ e $2n$.
b)n, $n+2$ e $2n$.
c) $2n$, $n+2$ e $3n$.
d) $3n$, $n+2$ e $2n$.
e) $3n$, $n+2$ e $4n$.

7. Uma caixa no formato de um poliedro precisa ser reforçada com 3 parafusos em cada vértice, um revestimento de metal nas suas 7 faces e uma aplicação de uma cola especial em todas as 15 arestas. A quantidade necessária de parafusos será igual a:
a) 72 b) 66 c) 24 d) 30 e) 10

8. Uma pirâmide tem 21 vértices e sua base é um polígono de 20 lados. Quantas arestas tem essa pirâmide?
a) 21 b) 39 c) 40 d) 42 e) 44

9. O número de faces de um poliedro convexo de 22 arestas é igual ao número de vértices. Então, qual o número de faces do poliedro?

10. Sabendo que em um poliedro o número de vértices corresponde a $2/3$ do número de arestas, e o número de faces é três unidades menos que o de vértices. Calcule o número de faces, de vértices e arestas desse poliedro.

1.5 Descritor D_5 - Teoria e Problemas

O descritor D_5 está relacionado razões trigonométricas no triângulo retângulo. As razões a serem observadas serão as mais usuais **seno, cosseno e tangente**. Vamos apresentar as relações a serem usadas e aplicá-las em alguns exemplos.

1.5.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

As razões trigonométricas, também chamadas de relações trigonométricas, são as possíveis divisões entre as medidas dos dois lados de um triângulo. Apresentamos as três mais conhecidas dessas relações:

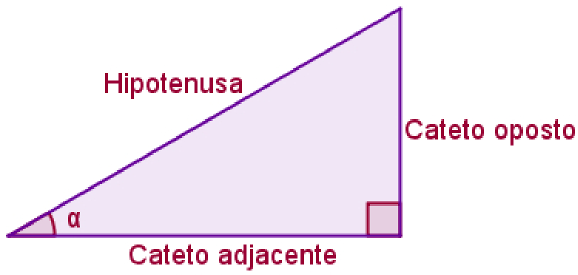


Figura 1.10: Triângulo Retângulo

- **Seno**

$$\sin\alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{CO}{H}$$

- **Cosseno**

$$\cos\alpha = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{CA}{H}$$

- **Tangente**

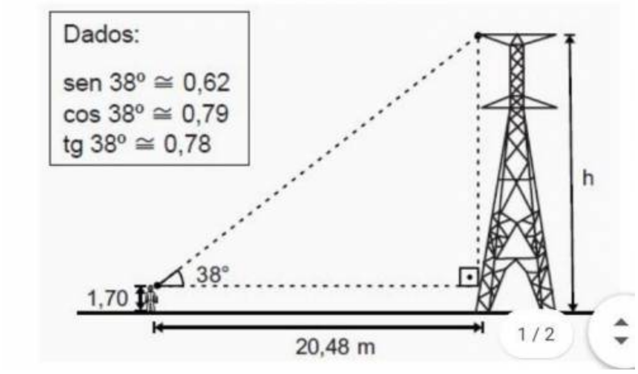
$$\tan\alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \frac{CO}{CA}$$

Para a maioria dos problemas que apresentamos e que percorrem as provas de avaliação do índice educacional, usaremos a tabela a seguir dos ângulos notáveis 30°, 45° e 60°.

α	30°	45°	60°
senα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Valores que fogem dessa tabela são normalmente apresentados no enunciado do problema.

Exemplo 1.12 *Observe abaixo o esquema que um observador montou para estimar a altura de uma torre de energia.*



Qual é a altura h aproximada dessa torre de energia?

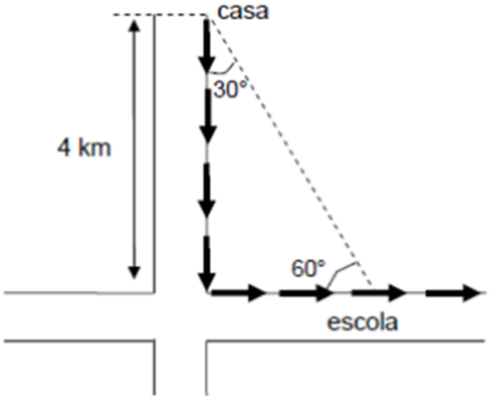
a) 15,97 *b) 17,67* *c) 26,25* *d) 27,62* *e) 34,73*

Resolução 12 *Observemos que parte da medida desejada h é oposta ao ângulo de 38°. O valor conhecido , 20,48 m, está relacionado cateto adjacente ao ângulo dado. Relacionamos parte da medida h uma vez que o triângulo que analisaremos está suspenso do solo 1,7 m. Assim, se denotarmos por x a medida do cateto oposto temos que* $h = x + 1,7$. *A medida trigonométrica a ser usada é a tangente, uma vez que queremos uma medida oposta a 38° e temos uma informação adjacente ao ângulo dado. Pela tabela contida nas informações do exemplo, temos*

$$\tan(38°) = \frac{x}{20,48} \quad \textit{implica que} \quad 0,78 = \frac{x}{20,48} \quad \textit{logo} \quad x = 0,78 \times 20,48 \approx 15,97$$

Sendo $h = x + 1,7$, *temos que* $h = 15,97 + 1,7 = 17,67$.

Exemplo 1.13 *Para se deslocar de sua casa até a sua escola, Pedro percorre o trajeto representado na figura abaixo.*



A distância total, em km, que Pedro percorre no seu trajeto de casa para a escola é de:

a) $4 + \sqrt{3}/4$ *b)* $4 + \sqrt{3}$ *c)* $4 + 4\sqrt{3}/3$ *d)* $4\sqrt{3}$ *e)* $4 + 4\sqrt{3}$

Resolução 13 *Basta calcularmos a distância horizontal percorrida por Pedro. Podemos usar tanto a informação de 30° como a de 60°. Usaremos a informação de 30° e a razão trigonométrica da tangente. Denotando por x a distância horizontal percorrida por Pedro, temos*

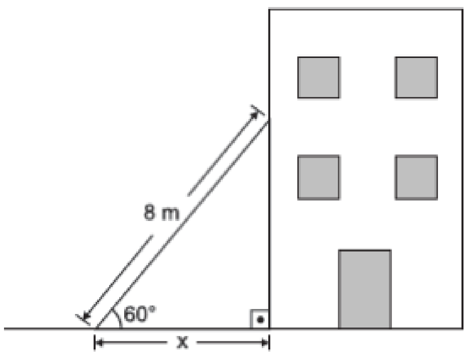
$$\tan(30°) = \frac{x}{4} \quad \textit{implica que} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{4} \quad \textit{logo,} \quad x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

A distância total percorrida por Pedro é

$$4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

1.5.2 Problemas Propostos

1. Paulo quer encostar uma escada de 8 m de comprimento na parede de um prédio, de modo que ela forme um ângulo de 60° com o solo, como mostra a representação abaixo.



A que distância, x, em metros, da parede Paulo deve apoiar essa escada no solo?

a) 4 b) 6 c) $4\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{3}$ e) 7

2. Observe o triângulo a seguir:

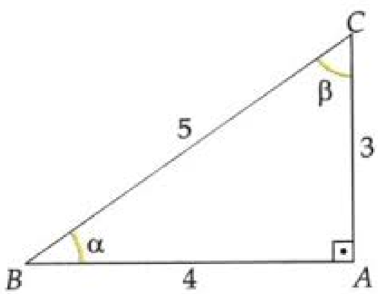
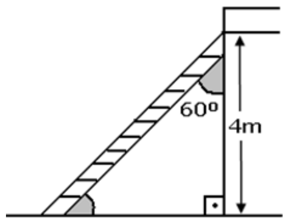


fig. 6

Determine a tangente do ângulo formado entre a hipotenusa e o maior dos catetos

a) 3/5 b) 4/3 c) 4/5 d) 5/3 e) 3/4

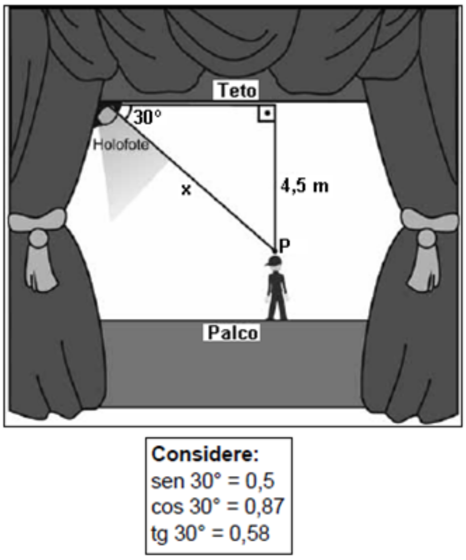
3. Uma escada apoiada em uma parede, num ponto distante 4 m do solo, forma com essa parede uma ângulo de 60°.



Qual é a medida do comprimento, em metros, da escada?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

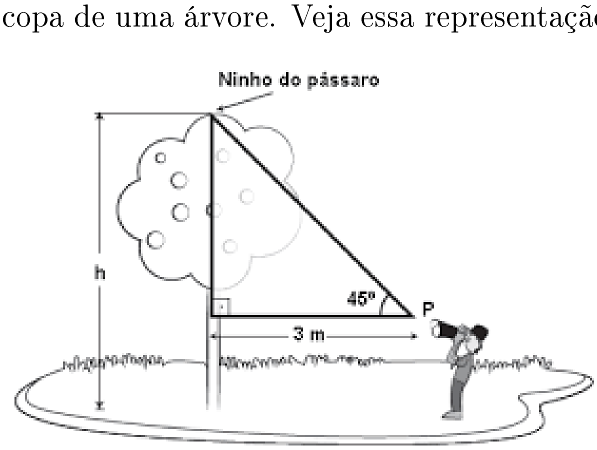
4. O esquema abaixo mostra a posição "P" de um ator em um palco durante sua apresentação em uma peça. Um holofote foi instalado nesse palco para iluminar a posição desse ator.



A distância "x" do holofote até a posição do ator, em metros, é igual a

a) 2,61 b) 4,5 c) 5,17 d) 7,75 e) 9,0

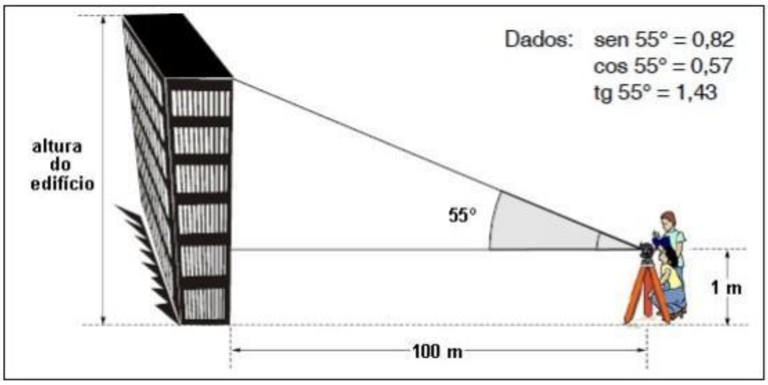
5. João posicionou um binóculo na posição P, a 1,5 m do solo, para observar o ninho de um pássaro na copa de uma árvore. Veja essa representação na figura abaixo.



Em relação ao solo, esse ninho encontra-se a uma altura h, e metros, de medida igual a

a) 3,0 b) 4,5 c) 6,0 d) 7,5 e) 9,0

6. O teodolito é um instrumento utilizado para medir ângulos. Um engenheiro aponta um teodolito contra o topo de um edifício, a uma distância de 100 m, e consegue obter um ângulo de 55°.



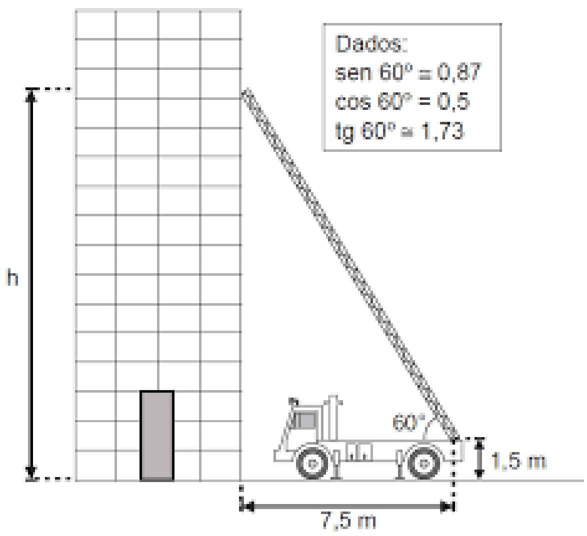
A altura do edifício é, em metros, aproximadamente:

a) 58 b) 83 c) 115 d) 144 e) 175

7. Uma escada deve ser construída para unir dois pisos de um prédio. A altura do piso mais elevado em relação ao piso inferior é de 8 m. Para isso, é necessário construir uma rampa plana unindo os dois pisos. Se o ângulo da rampa com o piso inferior for 30°, o comprimento da rampa, em metros, é:

a) 4 b) $8\sqrt{3}$ c) 8 d) 16 e) $16\sqrt{3}$

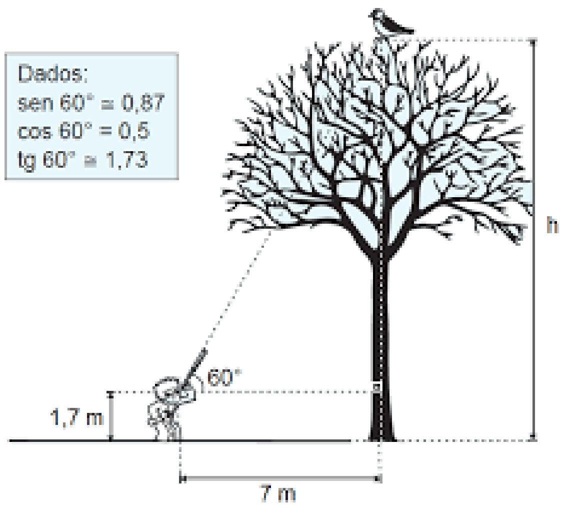
8. O corpo de bombeiros de uma cidade possui um caminhão multifuncional e autossuficiente que possui uma escada de plataforma giratória para alcançar edifícios com alturas elevadas. Em um treinamento de novos integrantes dessa corporação, um caminhão desse tipo foi posicionado conforme representado na figura abaixo.



Nesse treinamento, qual a foi a altura h, em metros, aproximada, atingida por essa escada?

a) 8 b) 8,6 c) 11,5 d) 13,5 e) 14,5

9. Com um binóculo, um observador avista um pássaro no topo de uma árvore sob um ângulo de 60°, conforme representado na figura abaixo.



Qual é a altura aproximada desse pássaro em relação ao solo, em metros?

a) 13,81 b) 12,11 c) 10,41 d) 7,79 e) 6,09

1.6 Descritor D_6 - Teoria e Problemas

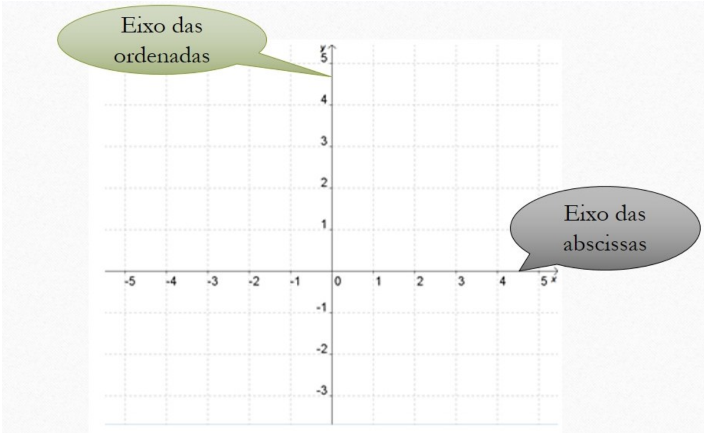
O descritor D_6 está relacionado a representação e localização de pontos no plano cartesiano. Vamos definir o plano cartesiano e seus elementos. Os exemplos e problemas são triviais e não aprofundaremos muito nesse descritor.

1.6.1 Plano Cartesiano

Plano cartesiano é um método criado pelo filósofo e matemático francês, René Descartes. Trata-se de dois eixos perpendiculares que pertencem a um plano em comum.

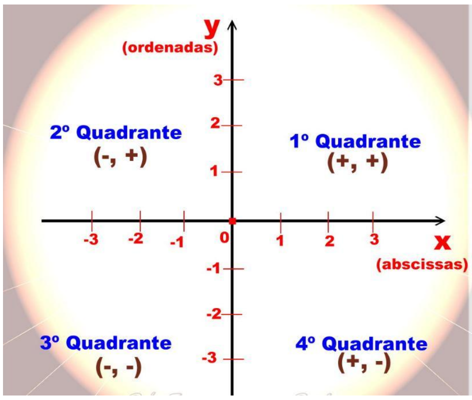
Descartes criou esse sistema de coordenadas para demostrar a localização de alguns pontos no espaço. Esse método gráfico é utilizado em diversas áreas, sobretudo na matemática e na cartografia.

O plano cartesiano é formado por duas retas reais perpendiculares, ou seja, o ângulo entre elas é de 90°. Essas retas determinam um único plano, que é denominado com sistema ortogonal de coordenadas cartesianas ou somente plano cartesiano. Os eixos cartesianos são denominados eixo das abscissas (eixo horizontal) e eixo das ordenadas (eixo vertical).

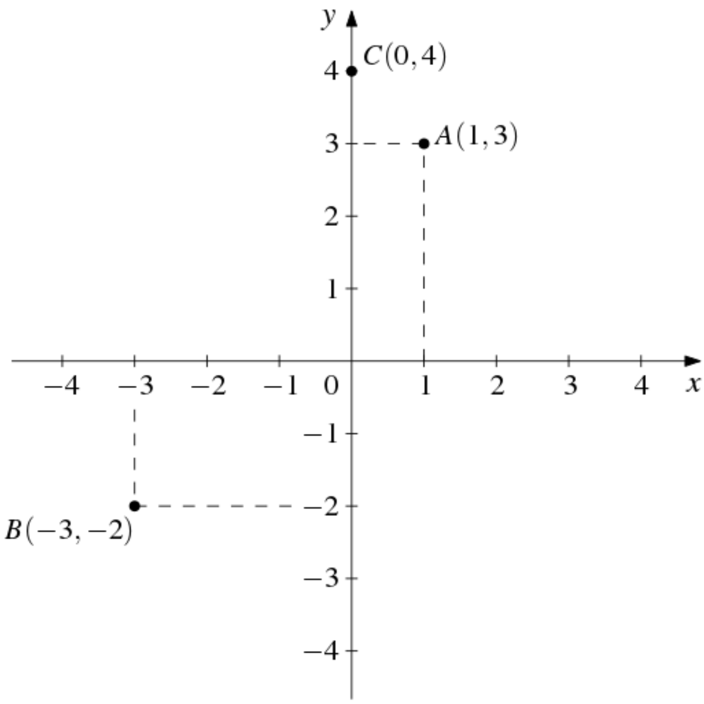


Todo **ponto** representado no plano cartesiano P possui duas coordenadas (x, y). A coordenada x é chamada de **abscissa do ponto** P e a coordenada y é chamada de **ordenada do ponto** P.

O plano cartesiano é dividido em quatro quadrantes, ordenados no sentido anti horário. Em cada quadrante as coordenadas possuem sinais específicos.

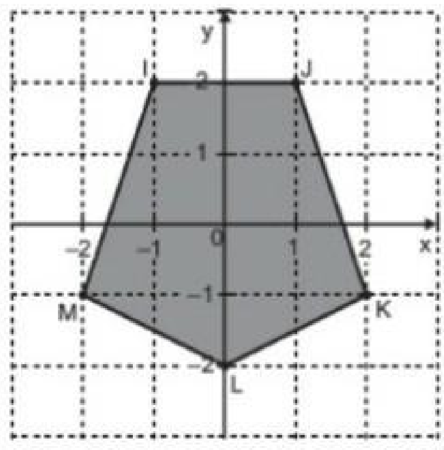


A figura abaixo possui a representação de alguns pontos no plano obedecendo a ordem acima.



1.6.2 Problemas Propostos

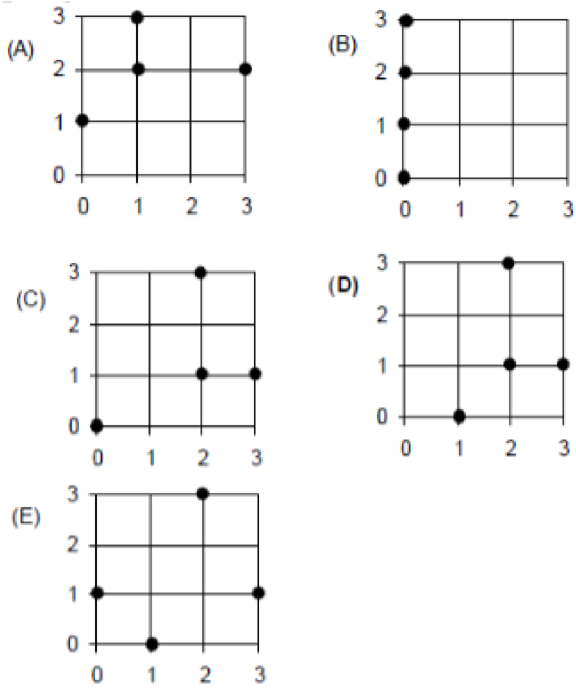
1. Observe o pentágono IJKLM representado no plano cartesiano abaixo.



O ponto de coordenadas $(-2,-1)$ é

a) I b) J c) K d) L e) M

2. Uma cidade tem quatro pontos turísticos. Considerando que os pontos são identificados pelas coordenadas $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(2,3)$ e $D(3,1)$ no plano cartesiano, o gráfico que melhor representa as localizações dos pontos de turismo é:

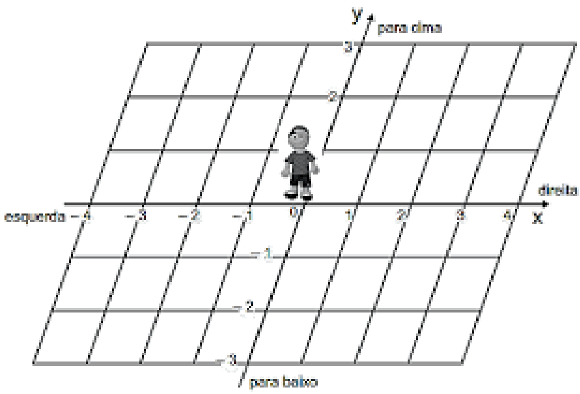


3. No plano cartesiano, o quadrado PQRS tem três de seus vértices nos pontos $P(-1,3)$, $Q(3,3)$ e $R(3,-1)$. Quais as coordenadas do vértice S desse quadrado?

a) $(-1,1)$ b) $(-3,1)$ c) $(-3,-1)$ d) $(-1,-1)$ e) $(-3,-3)$

4. Ricardo desloca-se sempre na horizontal ou vertical. Ele está posicionado na origem do plano cartesiano e deslocou duas casas para a esquerda desse plano e

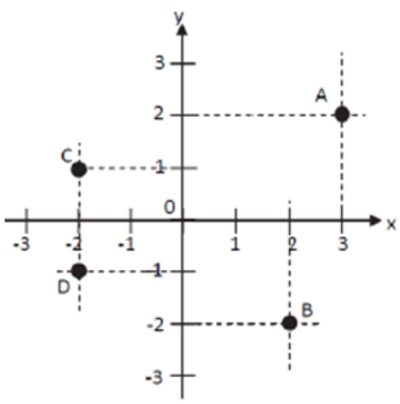
três casas para baixo, conforme indicado no desenho abaixo.



Qual é o ponto que indica a posição de Ricardo após essa movimentação?

a) $(-3,-2)$ b) $(-2,3)$ c) $(-2,-3)$ d) $(2,-3)$ e) $(2,3)$

5. Observe os pontos representados no plano cartesiano abaixo.



Dentre esses quatro pontos, os que apresentam sinais nas abscissas contrários aos sinais das ordenadas são

a) A e C b) D e B c) B e A d) C e B e) A e D

1.7 Descritor D_7 - Teoria e Problemas

O descritor D_7 está relacionado a interpretação geométrica dos coeficientes da equação da reta . O envolvimento dessa interpretação está mais voltado para os coeficientes angular e linear. Ambos, possui uma riqueza de interpretação e os abordaremos nesta seção.

1.7.1 Coeficiente Angular e Coeficiente Linear de uma Reta

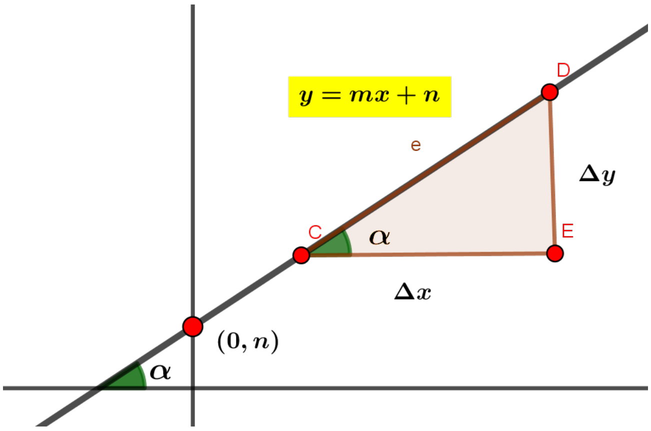
A forma mais usual de uma equação da reta é

$$y = mx + n$$

ao qual é chamada de **equação reduzida da reta**. Os valores m e n são os coeficientes da reta e são nomeados por:

- m é o **coeficiente angular da reta** ou **taxa de variação**.
- n é o **coeficiente linear da reta**

A riqueza desses dois valores serão explorados nos exemplos e problemas propostos.



O coeficiente angular da reta possui uma relação com a inclinação da reta. Sendo α o ângulo de inclinação da reta com o eixo x (medido no sentido anti horário), temos que o valor m pode ser obtido por meio de $m = \tan(\alpha)$. Analogamente, se são conhecidos dois pontos da reta, podemos obter m por meio das variações Δx e Δy,

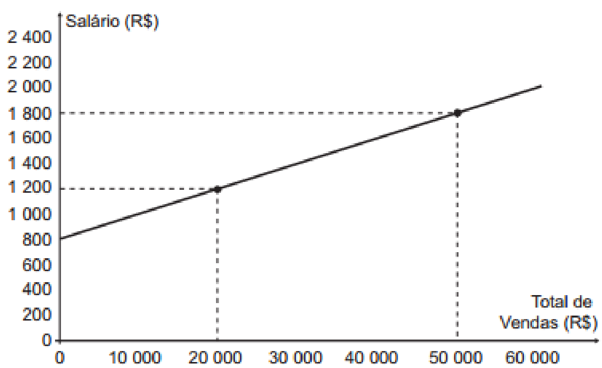
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para dois pontos dados $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, temos que

$$\Delta x = x_B - x_A \qquad e \qquad \Delta y = y_B - y_A$$

O **coeficiente linear** n indica o valor onde a reta corta o eixo y.

Exemplo 1.14 *No comércio é comumente utilizado o salário mensal comissionado. Além de um valor fixo, o vendedor tem um incentivo, geralmente um percentual sobre as vendas. Considere um vendedor que tenha salário comissionado, sendo sua comissão dada pelo percentual do total de vendas que realizar no período. O gráfico expressa o valor total de seu salário, em reais, em função do total de vendas realizadas, também em reais.*



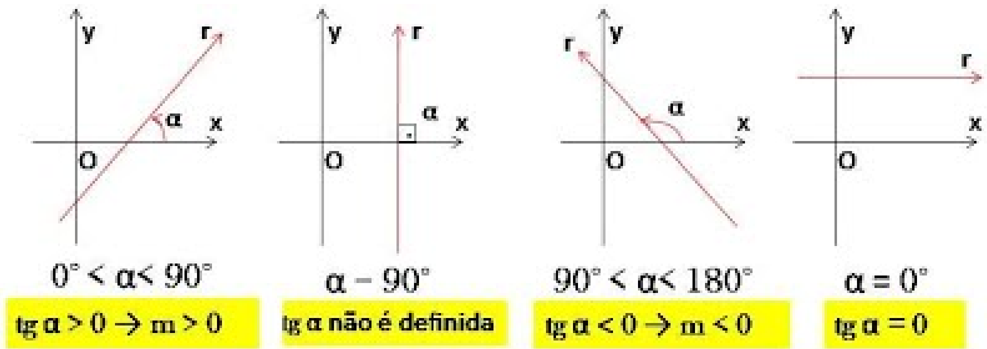
Qual o valor percentual da sua comissão?

a) 2,0% *b) 5,0%* *c) 16,7%* *d) 27,7%* *e) 50,0%*

Resolução 14 *O percentual de comissão é dado pelo coeficiente angular da reta descrita no gráfico. Considerando os pontos $A(20\ 000, 1\ 200)$ e $B(50\ 000, 1\ 800)$ sobre a reta, temos*

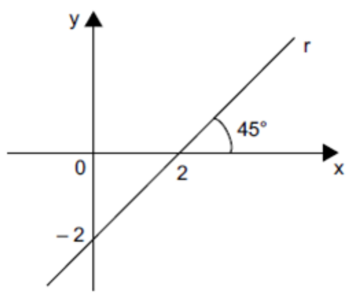
$$m = \frac{1\ 800 - 1\ 200}{50\ 000 - 20\ 000} = \frac{600}{30\ 000} = \frac{2}{100} = 2\%$$

Olhando para equação reduzida $y = mx + n$ podemos observar se a reta associada é crescente (**inclinação para a direita**) ou decrescente (**inclinação para a esquerda**). Além disso, podemos dizer se a reta é horizontal (**não cresce e nem decresce**) ou é vertical (**não corta o eixo y em nenhum ponto**).



Se o coeficiente angular é positivo, quanto maior for o valor mais inclinada é a reta em relação ao eixo x

Exemplo 1.15 *Observe a reta no plano cartesiano abaixo. Essa reta pode ser representada por uma equação da forma $y = mx + n$.*



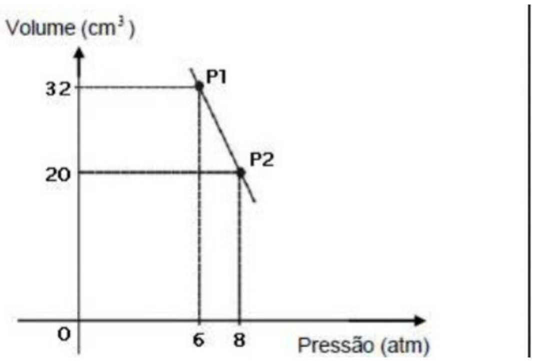
Os valores de m e n, nessa ordem, são

a) -1 e 2 *b) 1 e -2* *c) -2 e 1* *d) 2 e 1* *e) 2 e -2*

Resolução 15 *Como conhecemos o ângulo de inclinação da reta, temos que o coeficiente angular m é dado por $m = \tan(45) = 1$. A interpretação geométrica do coeficiente linear da reta n é o valor onde a reta corta o eixo y. Portanto, $n = -2$. Assim, $m = 1$ e $n = -2$.*

O coeficiente angular da reta também é chamado de **taxa de variação** e **declividade** da reta. Alguns problemas podem trazer essa nomenclatura em seu enunciado.

Exemplo 1.16 *Os pesquisadores verificaram que numa determinada região quando a pressão de um gás é de 6 atm, o volume é de 32 cm^3, e quando a pressão é de 8 atm, o volume é de 20 cm^3. A taxa média de redução do volume é representada pela declividade da reta que passa por $P_1(6,32)$ e $P_2(8,20)$, ilustrada no gráfico abaixo.*



Nesse caso, a declividade é igual a

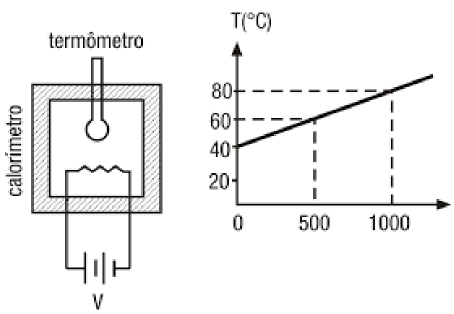
a) -6 *b) 6* *c) 8* *d) 10* *e) 32*

Resolução 16 *Note que a reta é decrescente e isso é suficiente para concluir que a declividade é -6. Para realizar o cálculo, usamos os pontos $P_1(6,32)$ e $P_2(8,20)$ e obtemos*

$$m = \frac{32-20}{6-8} = \frac{12}{-2} = -6$$

1.7.2 Problemas Propostos

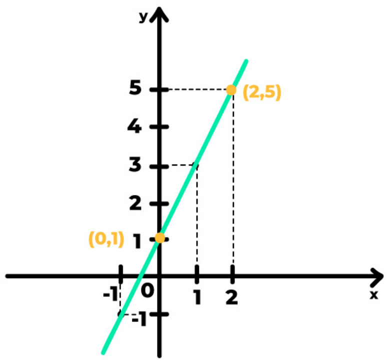
1. Um calorímetro, constituído por um recipiente isolante térmico ao qual estão acoplados um termômetro e um resistor elétrico. Num experimento, em que a potência dissipada pelo resistor, permitiu construir um gráfico da temperatura T em função do tempo t, como mostra a figura abaixo.



A taxa de aumento da temperatura $T(°C)$ é representada pela inclinação de reta que passa pelos pontos (500; 60) e (1000; 80) como mostra no gráfico acima. Nesse caso, a inclinação de reta é igual a:

a) 25 b) 80 c) 1000 d) 0,04 e) 60

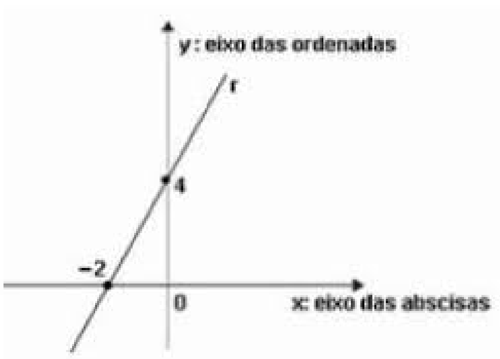
2. Observe o gráfico a seguir referente a função polinomial de 1º grau (reta) abaixo:



Pode se afirmar que o coeficiente angular m da reta é igual á:

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 2,5

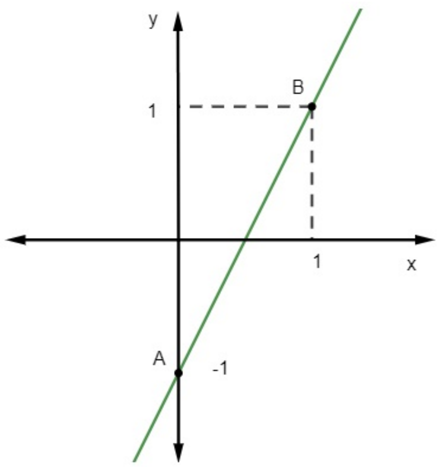
3. Observe a reta a seguir



O coeficiente angular m e o coeficiente linear n, nessa ordem, são:

a) 2 e -2 b) -2 e 2 c) 1 e -2 d) -1 e -2 e) 1 e 2

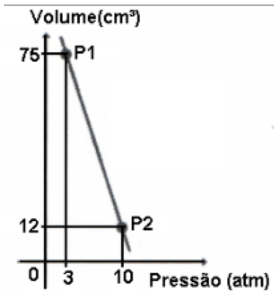
4. Observe a reta a seguir



O coeficiente angular m e o coeficiente linear n, nessa ordem, são:

a) 2 e -2 b) 2 e -1 c) 1 e -1 d) -1 e 2 e) 1 e 2

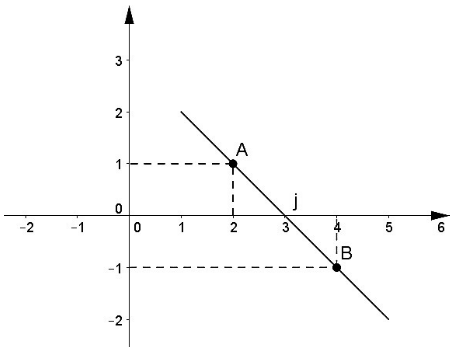
5. Estudantes verificam durante uma pesquisa que numa determinada região quando a pressão de um gás é de 3 atm, o volume é de $75cm^3$, e quando a pressão é de 10 atm, o volume é de $12cm^3$. Sabe-se que a declividade da reta que passa por $P_1 = (3, 75)$ e $P_2 = (10, 12)$, ilustrada no gráfico a seguir, representa a taxa média de redução do volume.



Nesse caso, a taxa média de redução do volume (declividade) é igual a

a) -12 b) -9 c) 3 d) 9 e) 10

6. Observe no desenho abaixo a representação geométrica da reta $y = mx + n$



Quais são os sinais dos coeficientes m e n dessa reta?

a) Positivo e negativo.

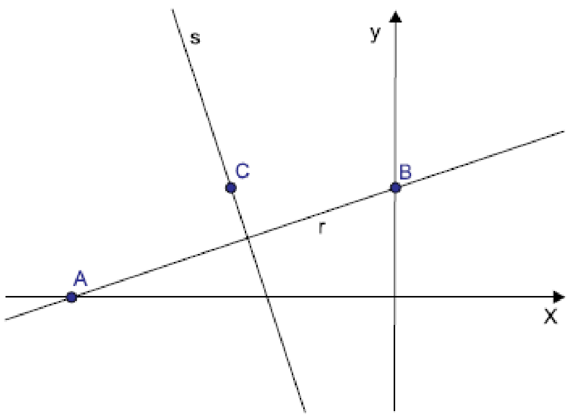
b) Positivo e nulo.

c) Positivo e positivo.

d) Negativo e positivo.

e) Negativo e negativo.

7. Observe no desenho abaixo a representação geométrica de duas retas r e s



Podemos afirmar que o produto dos coeficientes angulares de r e s, e o produto dos coeficientes lineares de r e s, possuem sinais, respectivamente,

a) Positivo e negativo.

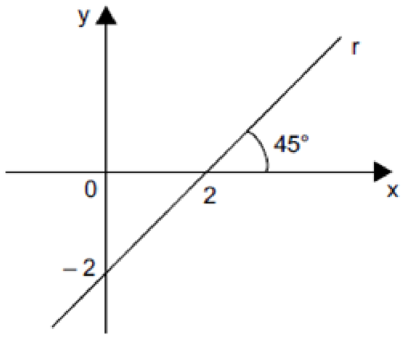
b) Positivo e nulo.

c) Positivo e positivo.

d) Negativo e positivo.

e) Negativo e negativo.

8. Observe o gráfico a seguir referente a função polinomial de 1º grau (reta) abaixo:



a equação reduzida da reta descrita no gráfico é igual á:

a) $y = -x + 1$

b) $y = 2x - 2$

c) $y = x - 2$

d) $y = -2x - 2$

e) $y = 45x - 2$

1.8 Descritor D_8 - Teoria e Problemas

O descritor D_8 está relacionado obter a equação de uma reta dados dois pontos ou dado um ponto e sua inclinação. O que está por trás do descritor D_8 é justamente o uso da condição de alinhamento de três pontos.

1.8.1 Equação da Reta

A condição de alinhamento de três pontos permite verificar quando três pontos no plano cartesiano estão alinhados. De fato, se um desses pontos é tornado variável, podemos descrever uma realção que as coordenadas de um dado ponto $P(x, y)$ deve satisfazer para estar alinhado a outros dois pontos fixos. Iniciamos diretamente da consequência da condição de alinhamento de três pontos por meio do seguinte resultado.

Um ponto $P(x,y)$ pertence a reta que passa pelos pontos $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Essa condição equivale a obter uma equação na forma

$$ax + by + c = 0 \tag{1.1}$$

com a, b e c números reais, $a \geq 0$ e $mdc(a,b,c) = 1$

A equação no forma (1.1) é chamada de **equação geral da reta** que passa pelos pontos $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$.

Exemplo 1.17 *Obtenha a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-3,-5)$ e $B(1,3)$.*

Resolução 17 *Usando a condição de alinhamento*

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\overbrace{-9-5x+y}^{DP} - (\overbrace{3x-3y-5}^{DS})}_{Determinante}$$

DP e DS são a soma dos produtos dos elementos das diagonais principais e secundárias, respectivamente. Sendo que a condição de alinhamento nos fornece que o determinante da matriz é zero temos

$$-9 - 5x + y - (3x - 3y - 5) = 0$$

ao qual agrupando os termos

$$-2x + 4y - 4 = 0 \qquad equivalentemente \qquad \underbrace{x - 2y + 2 = 0}_{Equação\ Geral}$$

A equação reduzida de uma reta é obtida quando isolamos a variável y na geral, deixando a mesma no formato

$$y = mx + n$$

onde m é o coeficiente angular da reta e n é o coeficiente linear da reta. É fácil notar que

Se $ax + by + c = 0$ é a equação geral de uma reta com $b \neq 0$, então

$$m = -\frac{a}{b} \qquad e \qquad n = -\frac{c}{b}$$

Podemos obter a equação geral ou bem como a equação reduzida da reta que passa por dois pontos por meio de um método prático para esse cálculo.

Exemplo 1.18 *Seja r a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-5,-1)$ e $B(-1,1)$. Obtenha a equação geral da reta r.*

Resolução 18 *Vamos usar de um método prático para a resolução desse exemplo. Como os pontos $A(-5,-1)$, $B(-1,1)$ e $P(x,y)$ estão alinhados, pois pertencem a mesma reta, temos:*

Figura 1.11: Coordenadas dos pontos

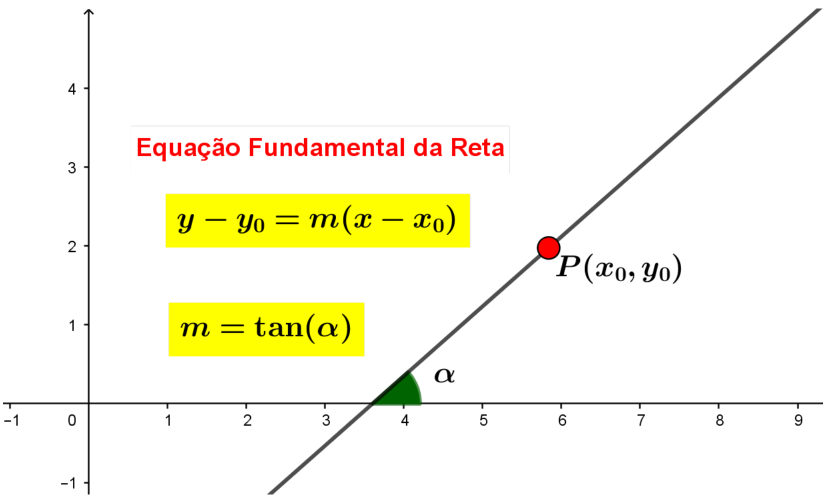
Produtos das Diagonais S.	-5	-1	Produtos das diagonais P.
1	-1	1	**-5**
x	x	y	**-y**
-5y	-5	-1	**-x**
DS$= 1 + x - 5y$			**DP**$= -5 - y - x$

Como estamos num alinhamento, temos que $DP = DS$. Assim,

$$\begin{aligned} -5 - y - x &= 1 + x - 5y \qquad \textit{passando tudo para o lado esquerdo} \\ -x - x - y + 5y - 5 - 1 &= 0 \\ -2x + 4y - 6 &= 0 \qquad \textit{dividimos por (-2)} \\ x - 2y + 3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

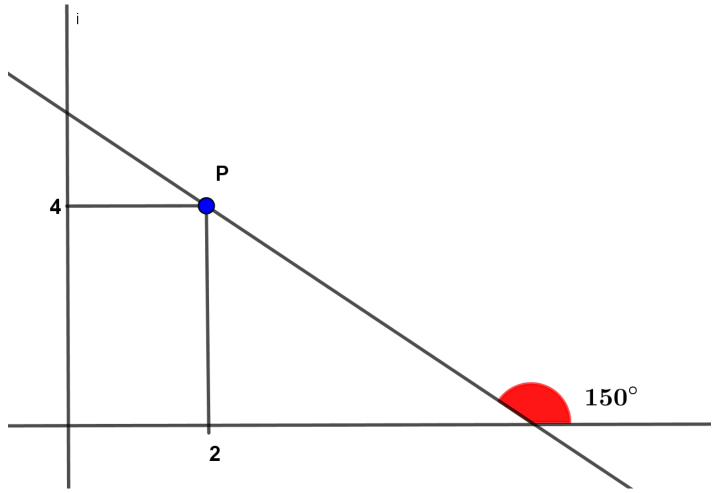
Assim, a equação geral da reta r é dada por $x - 2y + 3 = 0$.

Podemos de forma alternativa, obter a equação geral ou reduzida da reta por meio da **Equação Fundamental da Reta**.



Essa fórmula é útil quando desejamos encontrar a equação geral ou reduzida da reta tendo um ponto $P(x_0, y_0)$ e o coeficiente angular da reta m.

Exemplo 1.19 *Qual a equação reduzida da reta abaixo?*



Resolução 19 *Dado o ângulo da reta, temos que o coeficiente angular é dada por* $m = \tan(150°) = -\tan(30°) = -\sqrt{3}/3$. *Tendo o ponto* $P(2, 4)$, *fazemos* $x_0 = 2$ *e* $y_0 = 4$ *na equação fundamental da reta*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

obtemos

$$y - 4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$$

Uma dica de solução a partir dessa última igualdade é:

- *passar o denominador* 3 *do lado direito multiplicando o lado esquerdo (usando a distributividade)*
- *o numerador* $\sqrt{3}$ *é distribuído no termo* $(x - 2)$.

Essa é apenas uma alternativa para evitar soma de frações.

Seguindo essa discussão temos

$$3 \times (y - 4) = -\sqrt{3} \times (x - 2)$$

que resulta

$$3y - 12 = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

Neste momento, decidimos se escolhemos colocar na forma geral ou na forma reduzida. Visto que, a forma reduzida apresenta mais informação geométricas do que a forma geral, colocamos na forma reduzida e obtemos

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4$$

1.8.2 Problemas Propostos

1. Um robô enxerga o piso de uma sala como um plano cartesiano e foi programado para andar em linha reta, passando pelos pontos (1, 3) e (0, 6). Esse robô foi programado para andar sobre a reta
   a) $y = -3x + 6$
   b) $y = -3x + 3$
   c) $y = -3x + 1$
   d) $y = 3x + 6$
   e) $y = 3x + 1$

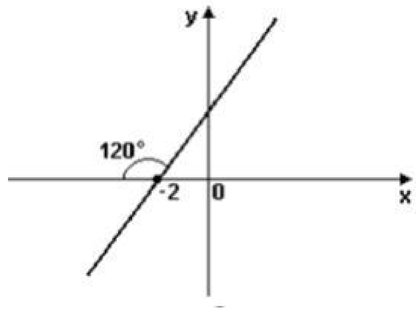
2. Identifique a equação da reta que passa pelo ponto (2, -1) e tem coeficiente angular 1/2
   a) $-x - 2y - 4 = 0$
   b) $2x - y + 4 = 0$
   c) $x - y + 4 = 0$
   d) $-x + 2y + 4 = 0$
   e) $4x - y - 4 = 0$

3. A equação da reta que passa pelos pontos de coordenadas (-1, - 1) e (7, 7) é
   a) $7x - y = 0$
   b) $-x + 7x = 0$
   c) $x + y = 0$
   d) $7x + 7 = 0$
   e) $x - y = 0$

4. A reta que passa pelo (0, 5) e tem inclinação de 45° com o sentido positivo do eixo horizontal é:
   a) $y = 5x + 3$
   b) $y = x + 5$
   c) $y = +3$
   d) $y = 3x + 5$
   e) $y = 2x\breve{}5$

5. Em um plano cartesiano desenhado sobre um mapa do Brasil, a cidade de Vitória está localizada no ponto V(5, 0) e a cidade do Rio de Janeiro no ponto R(1, 8). Qual é a equação da reta que passa por essas duas cidades nesse mapa?
   a) $y = -x + 5$
   b) $y = -3x + 11$
   c) $y = 2x + 10$
   d) $y = -3x + 15$
   e) $y = -2x + 10$

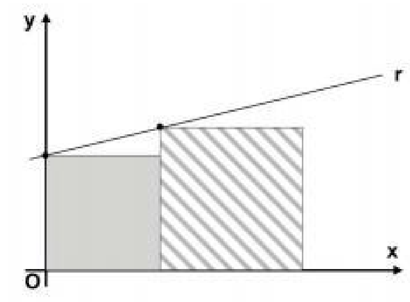
6. Qual a equação da reta dada no gráfico abaixo?



a) $y = -\sqrt{3}x + 1$
b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$
c) $y = \sqrt{3}x - 2$
d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$
e) $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

7. Uma reta forma com o eixo x um ângulo de 45° e passa pelo ponto de coordenadas (4, 1). A equação que representa essa reta é
a) $x - y - 3 = 0$
b) $x - y + 3 = 0$
c) $x + y + 3 = 0$
d) $x + y - 5 = 0$
e) $x - y + 5 = 0$

8. Na figura abaixo estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado.



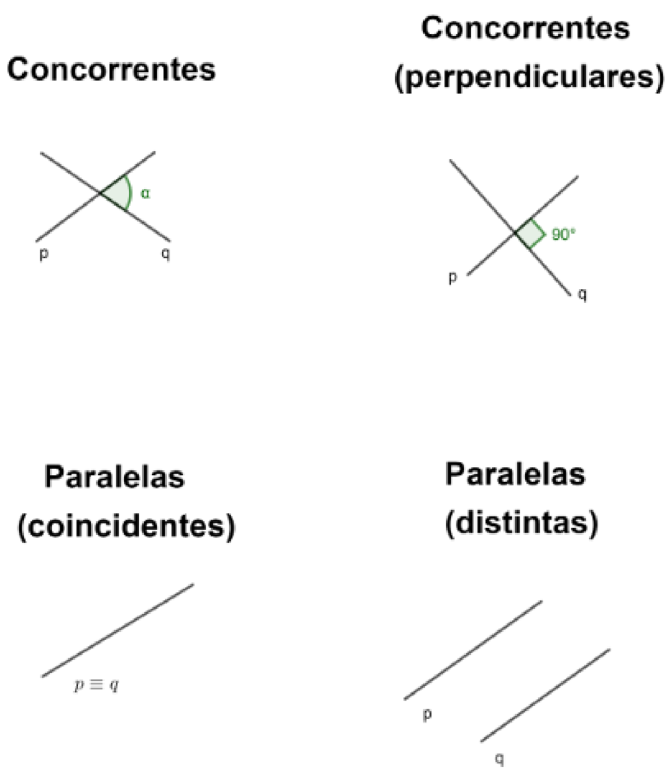
Nessas condições, a equação da reta r é:
a) $x - 2y = 4$
b) $4x - 9y = 0$
c) $2x + 3y = -1$
d) $x + y = 3$
e) $2x - y = 3$

1.9 Descritor D_9 - Teoria e Problemas

O descritor D_9 está relacionado a resolução de sistemas lineares com duas incógnitas (duas variáveis) voltada para a interpretação da solução como o ponto de intersecção de duas ou mais retas. Vamos discutir as posições que duas retas no plano cartesiano pode assumir e verificar quando é possível obter ponto de intersecção de duas ou mais retas.

1.9.1 Posições relativas entre duas retas e a resolução de sistemas lineares

No estudo analítico da reta não podemos deixar de falar das posições relativas entre retas. Dadas duas ou mais retas do plano, elas podem ser **paralelas**, **concorrentes**, **coincidentes** ou **concorrentes perpendiculares**.



A tabela abaixo mostra a a relação que duas retas r e s possui e a relação satisfeitas pelos seus respectivos coeficientes angulares e lineares.

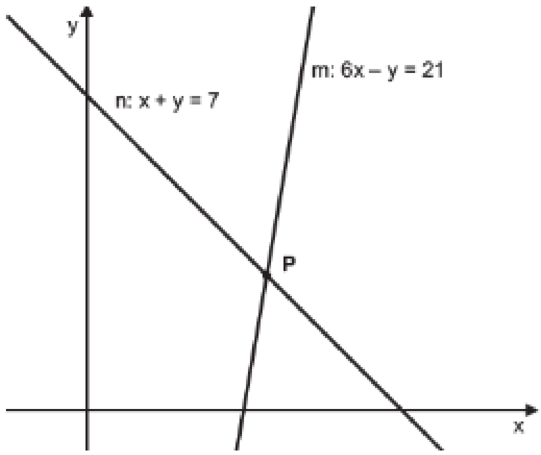
Posições entre r e s	**Relação entre os coeficientes**
Retas Paralelas	$m_r = m_s$
Retas Coincidentes	$m_r = m_s$ e $n_r = n_s$
Retas concorrentes	$m_r \neq m_s$
Retas Perpendiculares	$m_r \cdot m_s = -1$

Figura 1.12: **Posições relativas vs relação entre os coeficientes**

- m_r: coeficiente angular da reta r
- m_s: coeficiente angular da reta s
- n_r: coeficiente linear da reta r
- n_s: coeficiente linear da reta s

Por mais que apresentamos aqui essas informações, estamos interessados em explorar os casos em que as retas dadas são concorrentes. Para esses casos, podemos determinar o ponto de intersecção entre as retas.

Exemplo 1.20 *No plano cartesiano abaixo estão representados as retas m, n e suas respectivas equações.*



As coordenadas do ponto P, intersecção dessas retas, são

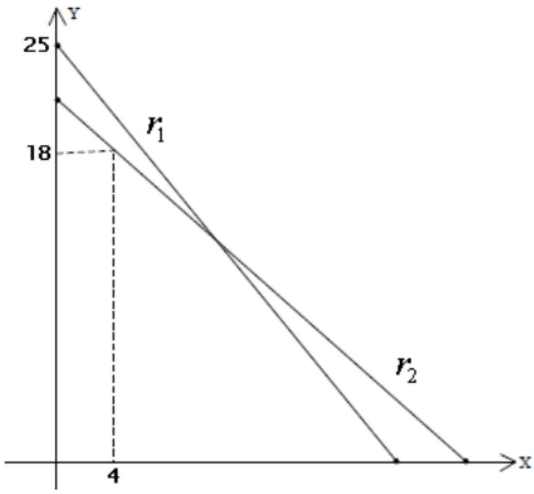
a) (1,1) *b) (4,3)* *c) (5,-2)* *d) (7,0)* *e) (6,-1)*

Resolução 20 *Para obter as coordenadas do ponto P, devemos resolver o sistema linear*

$$\begin{aligned} 6x - y &= 21 \\ x + y &= 7 \end{aligned}$$

Somando as duas equações, obtemos $7x = 28$ *que nos fornece* $x = 4$. *Por meio da segunda equação,* $x + y = 7$, *temos que* $4 + y = 7$ *e, consequentemente,* $y = 3$. *Logo, o ponto de intersecção das retas m e n é* $(4, 3)$.

Exemplo 1.21 *Um caixa eletrônico disponibiliza cédulas de R\$ 20,00 e R\$ 50,00. Um cliente sacou neste caixa um total de R\$ 980,00, totalizando 25 cédulas. Essa situação está representada pelo gráfico abaixo.*



Sabendo que r_1 representa a reta de equação $x + y = 25$ e r_2 a reta de equação $20x + 50y = 980$, onde x representa a quantidade de cédulas de R\$ 20,00 e y a quantidade de cédulas de R\$ 50,00, a solução do sistema formado pelas equações de r_1 e r_2 é o par ordenado:

a) (8,17)   b) (9,16)   c) (7,18)   d) (11,14)   e) (12,13)

Resolução 21 *Para obter a solução do sistema e, portanto o par ordenado desejado, devemos resolver o sistema linear*

$$\begin{aligned} x + y &= 25 \\ 20x + 50y &= 980 \end{aligned}$$

Vamos usar o método da substituição para a solução desse sistema linear. Na primeira equação, isolando y, obtemos $y = 25 - x$. Substituindo na segunda equação

$$20x + 50 \times (25 - x) = 980 \quad \rightarrow \quad 20x1250 - 50x = 980 \quad \rightarrow \quad -30x = 980 - 1250$$

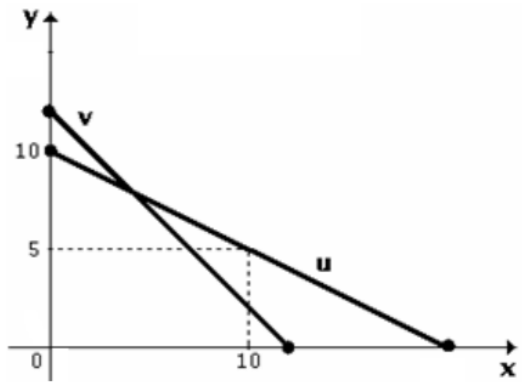
A última igualdade permite dizer

$$30x = 270 \quad \textit{implica que} \quad x = 9$$

Sendo $x + y = 25$, temos que $y = 16$. Portanto, obtemos o par ordenado $(9, 16)$ como solução do sistema linear.

1.9.2 Problemas Propostos

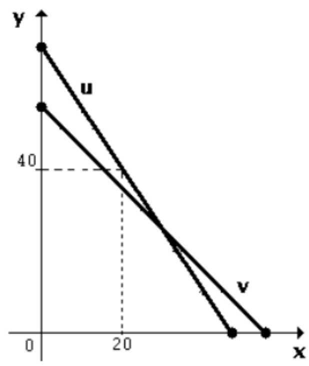
1. Em um estacionamento há carros e motos num total de 12 veículos e 40 rodas. Essa situação está representada pelo gráfico abaixo.



Sabendo que "v" representa a reta de equação $x + y = 12$ e "u" a reta de equação $2x + 4y = 40$, onde x representa à quantidade de motos e y a quantidade de carros, a solução do sistema formado pelas equações de "u" e "v" é o par ordenado:

a) (4,8) b) (8,4) c) (10,5) d) (2,10) e) (7,7)

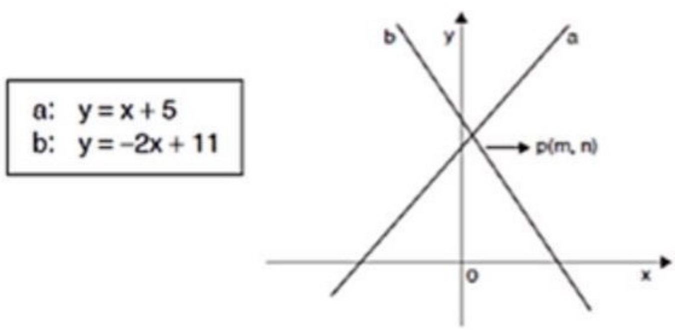
2. Na promoção de uma loja, uma calça e uma camiseta custam juntas R$ 55,00. Comprei 3 calças e 2 camisetas e paguei o total de R$ 140,00.



Sabendo que "u" representa a reta de equação $3x + 2y = 140$ e "v" a reta de equação $x + y = 55$, onde x representa à quantidade de calça e y a quantidade de camisetas, a solução do sistema formado pelas equações de "u" e "v" é o par ordenado:

a) (40,15) b) (15,40) c) (35,20) d) (30,25) e) (25,30)

3. As duas retas a e b, representadas na figura abaixo, têm as seguintes equações:



O ponto P (m, n) é intersecção das duas retas. O valor de m – n é igual a:

a) 1 b) -2 c) -5 d) -7 e) 5

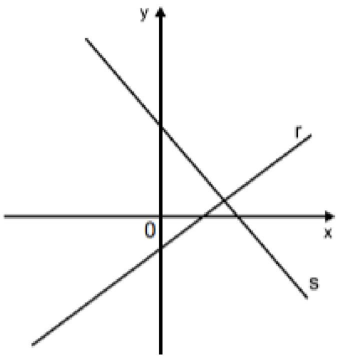
4. Num sistema cartesiano, o ponto Q representa a intersecção das retas $2x-y-1=0$ e $5x-y-4=0$. Quais são as coordenadas desse ponto Q?

   a) (1,1) b) (-1,-1) c) (-1,4) d) (2,5) e) (5,2)

5. As retas, cujas equações são $2x-3y=2$ e $x=-2$, se interceptam no ponto

   a) (-2,2) b) (-2,-2) c) (2,-2) d) (-2,0) e) (2,-3)

6. No plano cartesiano abaixo, a reta r tem equação $y=mx+n$ e a reta s tem equação $y=px+q$.



   De acordo com essa representação,

   a) $m>0$ e $p<0$

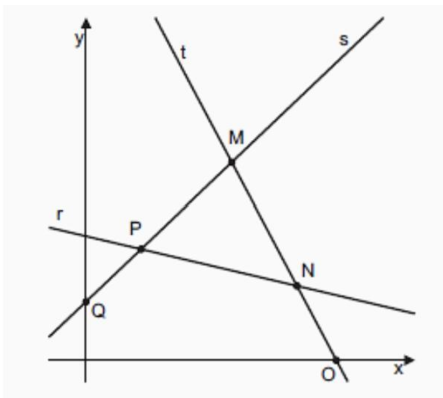
   b) $m>0$ e $q<0$

   c) $m<0$ e $p>0$

   d) $n<0$ e $q<0$

   e) $n<0$ e $p>0$

7. Observe, no plano cartesiano abaixo, as retas r, s e t e os pontos M, N, O, P e Q.



   A solução do sistema de equações formado pelas equações das retas s e t está representado nesse plano cartesiano pelo ponto

   a) M b) N c) O d) P e) Q

8. Duas retas r e s são concorrentes em um plano cartesiano. As equações dessas retas são, respectivamente, $2x + 3y = 14$ e $3x + y = 7$. O ponto de interseção dessas retas é

   a) (-5,8) b) (1,4) c) (2,3) d) (5,4) e) (14,7)

1.10 Descritor D_{10} - Teoria e Problemas

O descritor D_{10} está relacionado ao estudo das circunferências em Geometria Analítica. Este descritor tem como objetivo trabalhar o reconhecimento, dentro de um conjunto de equações, as que descrevem uma circunferência. Vamos falar um pouco sobre esse elemento geométrico e caracteriza-lo algebricamente.

1.10.1 Equação Reduzida e Equação Geral da Circunferência

Uma **circunferência** é o conjunto de pontos equidistantes a um ponto $C(x_C, y_C)$

- $C(a, b)$ é o **centro** da circunferência
- O valor da equidistância é chamada de **raio**.

Denotaremos o raio de uma circunferência pela letra r. Assim, uma circunferência é um conjunto de pontos $P(x, y)$ tais que

$$d_{PC} = r$$

ou seja, uma circunferência é o conjunto de pontos $P(x, y)$ que satisfaz a equação

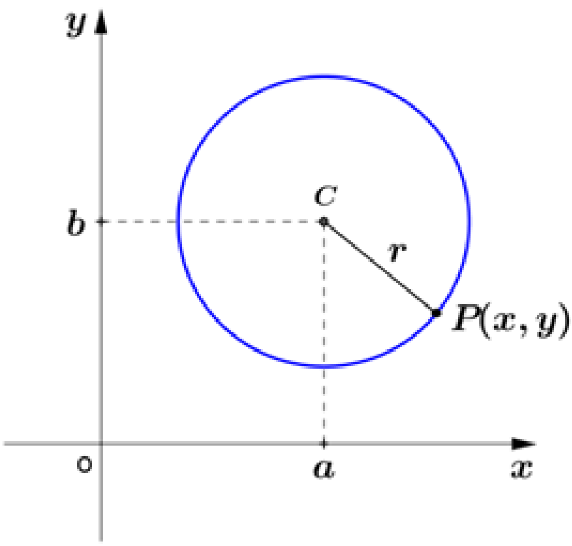


Figura 1.13: Circunferência de Centro $C(a, b)$ e raio r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Tal equação é chamada de **equação reduzida da circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio r.

Exemplo 1.22 *Qual a equação reduzida da circunferência de centro* $C(-3, 4)$ *e raio* $2\sqrt{3}$*?*

Resolução 22 *Dado o centro* $C(-3, 4)$ *temos que as coordenadas do centro são* $a = -3$ *e* $b = 4$*. A medida do raio é dada por* $r = 2\sqrt{3}$*. Substituímos esses dados na equação*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

obtemos

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 12$$

Quando na equação reduzida

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

desenvolvemos os produtos notáveis

- $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
- $(y - b)^2 = y^2 - 2by + b^2$

podemos reescrever a equação reduzida da circunferência na forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde:

- $D = -2a$
- $E = -2b$
- $F = a^2 + b^2 - r^2$

Essa equação é chamada de **Equação Geral da Circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio r.

Exemplo 1.23 *Qual a equação geral da circunferência de centro* $C(-4, -2)$ *e raio* $2\sqrt{5}$*?*

Resolução 23 *Para resolver esse exemplo, podemos proceder de duas formas.*
RESOLUÇÃO 1: *Nesta resolução obtemos a equação reduzida e desenvolvemos os*

produtos notáveis deixando a equação na forma geral. A equação reduzida da circunferência de centro $C(-4,-2)$ *e raio* $2\sqrt{5}$ *é*

$$(x+4)^2+(y+2)^2=20$$

Agora, desenvolvemos os produtos notáveis

$$x^2+8x+16+y^2+4y+4=20$$

Agora, deixando no formato $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, *temos que*

$$x^2+y^2+8x+4y=0$$

é a equação geral pedida.

RESOLUÇÃO 2: *Nesta resolução, usamos o formato geral*

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

e calculamos os coeficientes D, E *e* F, *Se o centro é* $C(-4,-2)$, *então* $a--4$ *e* $b=-2$. *O raio* $r=2\sqrt{5}$ *e, portanto,* $r^2=20$. *Usando as equações*

- $D=-2a$
- $E=-2b$
- $F=a^2+b^2-r^2$

obtemos que $D=-2\cdot(-4)=8$, $E=-2\cdot(-2)=4$ *e* $F=(-4)^2+(-2)^2-20=0$. *Portanto, substituindo os coeficientes na equação geral, obtemos*

$$x^2+y^2+8x+4y=0$$

É bom enfatizar que a equação

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

descreve uma circunferência sempre que dado os valores de a, b e F a equação

$$F=a^2+b^2-r^2$$

na variável r, admite solução positiva. Além do mais, quando $D=0$, temos que o centro da circunferência pertence ao eixo das ordenadas. Se $E=0$, então o centro da circunferência pertence ao eixo das abscissas. Agora, se $E = F = 0$, então a circunferência possui seu centro na origem do plano cartesiano. Isto é, no ponto $C(0, 0)$.

Uma circunferência com centro na origem $(0, 0)$ e raio r, possui equação

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1.3}$$

Exemplo 1.24 *Qual das equações abaixo descreve uma circunferência?*

a) $2x + 3y - 6 = 0$

b) $x^2 - y^2 - 6 = 0$

c) $y = 3x^2 - 4x + 1$

d) $x^2 + y^2 = 16$

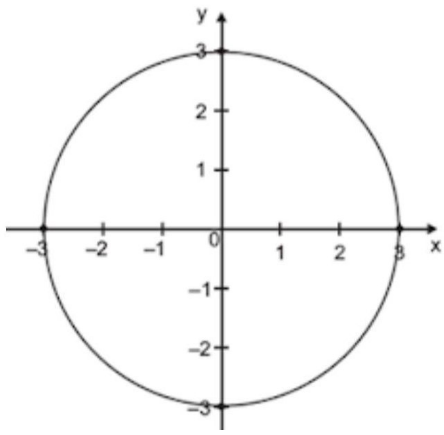
e) $x + y^2 - 6y + 24 = 0.$

Resolução 24 *O item que representa uma equação de uma circunferência se encontra no item d). Note que esta equação está na forma (1.3) onde* $r^2 = 16$*, e, portanto,* $r = 4$.

No exemplo anterior, o item a) trás uma equação geral da reta, nos itens c) e e), temos uma equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y e eixo x, respectivamente. No item b), temos uma hipérbole.

1.10.2 Problemas Propostos

1. Observe a circunferência de centro na origem representada no plano cartesiano abaixo.



A equação dessa circunferência é

a) $2x^2 + y^2 - 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 9$

c) $y = 3x^2 - 4x + 1$

d) $2x^2 + y^2 - 2x + 3y = 16$
e) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 18 = 0$.

2. A equação da circunferência que passa pelo ponto (2, 0) e que tem centro no ponto (2, 3) é dada por:
a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
d) $2x^2 + y^2 - 2x + 3y = 16$
e) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 18 = 0$.

3. Ao fazer uma planta de uma pista de atletismo, um engenheiro determinou que, no sistema de coordenadas usado, tal pista deveria obedecer à equação:

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$$

Desse modo, os encarregados de executar a obra começaram a construção e notaram que se tratava de uma circunferência de:
a) raio 4 e centro nos pontos de coordenadas (–2, 5).
b) raio 4 e centro nos pontos de coordenadas (2, –5).
c) raio 2 e centro nos pontos de coordenadas (2, –5).
d) raio 2 e centro nos pontos de coordenadas (–2, 5).
e) raio 5 e centro nos pontos de coordenadas (4, –10).

4. Ao fazer uma planta de um canteiro de uma praça, um engenheiro determinou que, no sistema de coordenadas usado, tal pista deveria obedecer à equação:

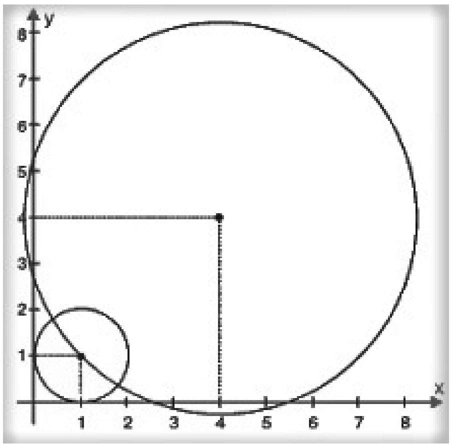
$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$$

Desse modo, os encarregados de executar a obra começaram a construção e notaram que se tratava de uma circunferência de:
a) raio 3 e centro nos pontos de coordenadas (4, + 2).
b) raio 4 e centro nos pontos de coordenadas (2, -4).
c) raio 11 e centro nos pontos de coordenadas (–8, -4).
d) raio 3 e centro nos pontos de coordenadas (2, 4).
e) raio 4 e centro nos pontos de coordenadas (–2, 3).

5. Sejam $M(7, -2)$ e $N(5, 4)$. Se L é uma circunferência que tem o segmento MN como um diâmetro, então a equação de L é:
a) $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 27 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 27 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 12x + 2y + 27 = 0$

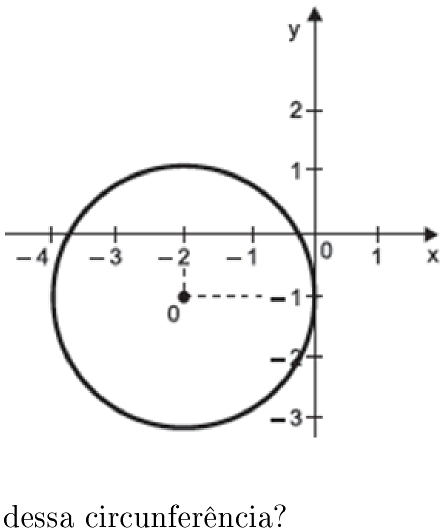
d) $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 27 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 12x + 2y - 27 = 0$

6. Observe a figura a seguir



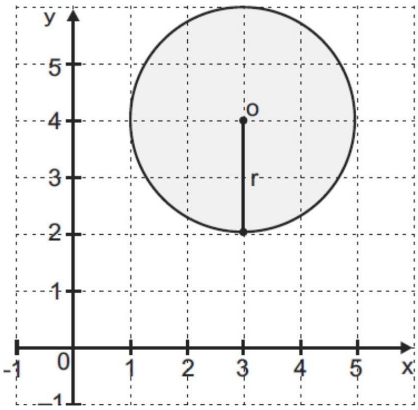
Sabendo-se que a circunferência de maior raio passa pelo centro da circunferência de menor raio, a equação da circunferência de maior raio é
a) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 14 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 14 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 18 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 18 = 0$

7. Observe no plano cartesiano abaixo a circunferência de centro O.



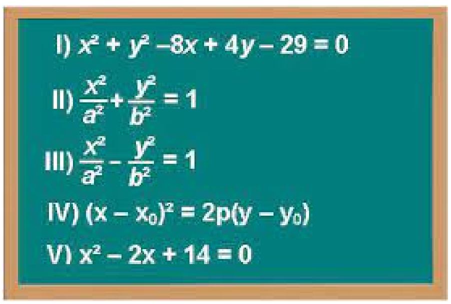
Qual é a equação geral dessa circunferência?
a) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
e) $x^2 - y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

8. Observe no plano cartesiano abaixo a representação gráfica de uma circunferência de centro



Qual é a equação dessa circunferência?
a) $(x-4)^2+(y-3)^2=4$
b) $(x-4)^2+(y-3)^2=2$
c) $(x-3)^2+(y-4)^2=4$
d) $x^2+y^2=2$
e) $x^2+y^2=4$

9. Um professor de matemática escreveu varias equações na lousa e pediu aos alunos que identificas- se uma equação da circunferência.



A equação da circunferência é:
a) I b) II c) III d) IV e) V

10. Qual é a equação da circunferência de centro C(1,0) e raio r = 3?
a) $x^2+y^2-2x+8=0$
b) $x^2+y^2+2x+8=0$
c) $x^2+y^2-2x-5=0$
d) $x^2+y^2+2x-5=0$
e) $x^2+y^2-9=0$

Capítulo 2

Grandezas e Medidas

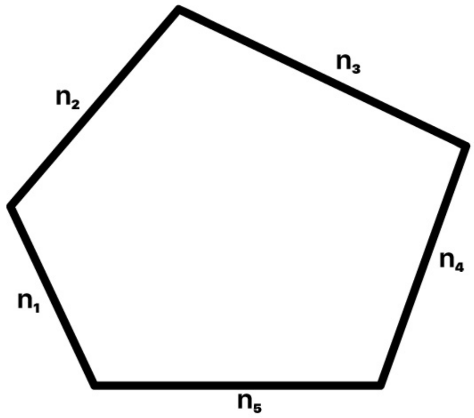
Neste segundo capítulo vamos discutir sobre os descritores associados ao tema grandezas e medidas. Toda abordagem realizada a seguir é feita por meio de uma fundamentação teórica seguida de problemas relacionados. Estes problemas possuem o mesmo nível de dificuldade cobrada nas provas de avaliação externa.

2.1 Descritor D_{11} - Teoria e Problemas

O descritor D_{11} está relacionado ao cálculo de perímetro de figuras planas. Sabemos que o perímetro depende exclusivamente da forma descrita pela figura. Vamos brevemente comentar sobre perímetros e, posteriormente, faremos alguns exemplos.

2.1.1 Périmetros de Fíguras Planas

O perímetro de uma figura plana é a medida de seu contorno. A maneira de se calcular o perímetro depende exclusivamente da forma da figura plana. Quando a figura representa um polígono, temos que a medida do perímetro é igual a soma das medidas dos lados do polígono. Por exemplo: O polígono abaixo

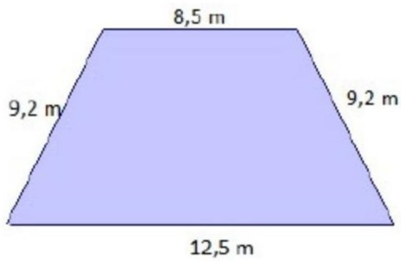


possui perímetro

$$P = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$

É de costume denotar para o caso de polígonos, o perímetro por $2P$, deixando a variável P, para o semi-perímetro. Mesmo dentro desse costume, seguiremos denotando o perímetro simplesmente por P.

Exemplo 2.1 *Seu Artur deseja cercar com tela de arame, um canteiro que tem as medidas indicadas na figura abaixo.*



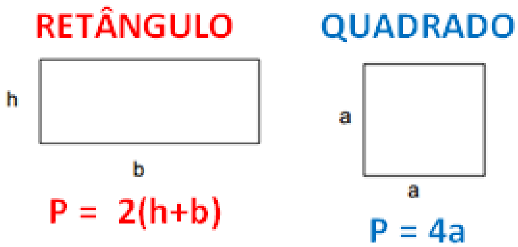
Se cada metro de tela custa R$ 3,00, quanto Seu Artur vai gastar?
a) R$ 39,40 b) R$ 116,20 c) R$ 117,20 d) R$ 118,20 e) R$ 161,00

Resolução 25 *Devemos primeiramente calcular o perímetro do terreno que é*

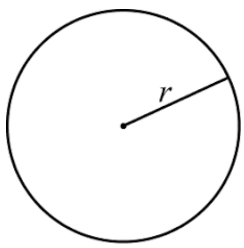
$$P = 8,5 + 12,5 + 9,2 + 9,2 = 39,40\ m$$

Como cada metro de cerca de arama custa R$ 3,00, temos que o custo de Artur será de $39,40 \times 3,00 = 118,20$.

Algumas formas possui fórmula fechada para cálculo de seus perímetros. Esse é o caso do quadrado e retângulo.



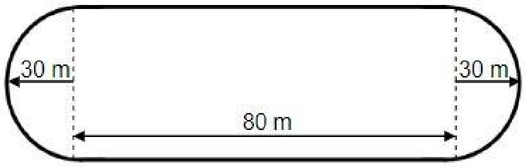
Outras formas como a circunferência possuem formas fechadas para o cálculo de seu perímetro. A este perímetro também o chamamos de comprimento da circunferência.



$$C = 2\pi r$$

em que C denota o comprimento da circunferência, r é a medida do raio e π denota o número irracional $3,141592\ldots$.

Exemplo 2.2 *Para incentivar a prática de atividades físicas, a Associação dos Moradores do Bairro Morada Feliz decidiu construir uma pista para caminhada, composta por um retângulo e duas semicircunferências de raio igual a 30 metros, como mostra a figura a seguir.*



Considere que uma pessoa caminhe 10 voltas completas por essa pista. A distância aproximada, em metros, que essa pessoa terá caminhado será de (Adote $\pi = 3$)

a) 3400 b) 3300 c) 3200 d) 3100 e) 3000

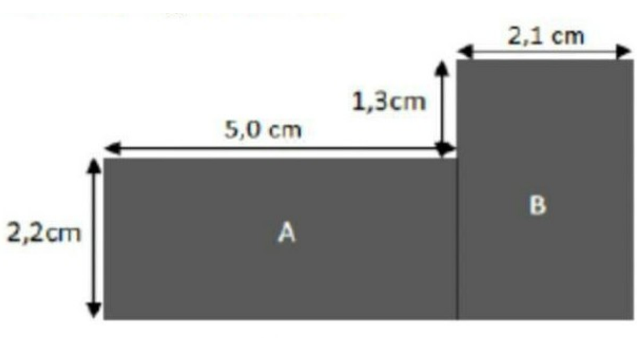
Resolução 26 *Observe que o perímetro da pista, a ser calculado, equivale ao perímetro de uma circunferência mais dois comprimentos de 80. A circunferência possui raio medindo 30 m, portanto possui perímetro igual a $C = 2 \times 3 \times 30 = 180$ m. O perímetro da pista é*

$$P = 180 + 2 \times 80 = 340\ m$$

Assim, uma volta na pista equivale a 340 metros. Portanto, se uma pessoa percorre 10 voltas, a distância aproximada caminhada será de 3400 metros.

2.1.2 Problemas Propostos

1. Fernando fez uma maquete de dois compartimentos de sua casa e usou pedaços retangulares de madeira com as seguintes dimensões, conforme figura abaixo.

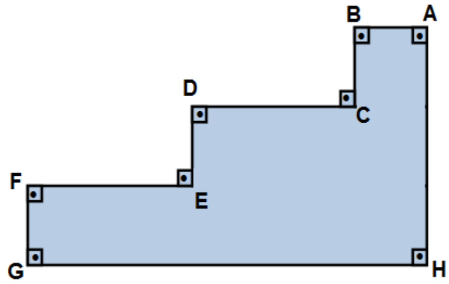


O perímetro dessa figura, em centímetros, é

a) 21,2 b) 20,2 c) 15,6 d) 15,2 e) 12,6

2. O pátio de uma escola tem o formato da figura ABCDEFGH e possui dimensões

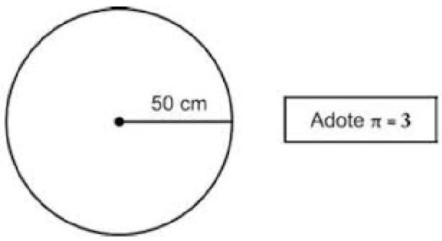
$$\overline{CD} = \overline{EF} = 4\ m \qquad e \qquad \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{ED} = \overline{FG} = 2\ m$$



O perímetro desse pátio, em metros, é

a) 16 b) 30 c) 32 d) 36 e) 44

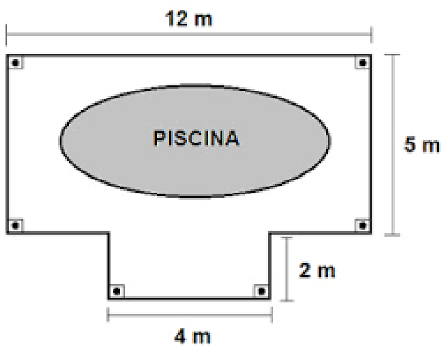
3. Maria vai contornar com renda uma toalha circular com 50 cm de raio, conforme a figura abaixo.



Quantos centímetros Maria vai gastar de renda?

a) 100 b) 300 c) 600 d) 2500 e) 7500

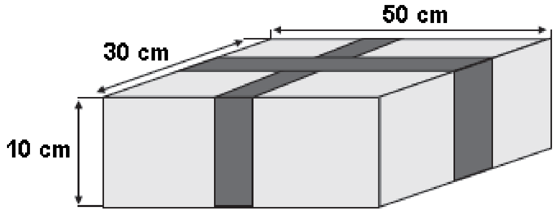
4. A piscina de um hotel recebeu uma grade de proteção na faixa indicada na figura abaixo.



O comprimento total, em metros, dessa grade é

a) 84 b) 68 c) 38 d) 30 e) 12

5. Uma caixa retangular foi lacrada com uma fita adesiva que transpassou o centro de todas as suas faces, conforme ilustrado na figura abaixo. Observe as dimensões dessa caixa.



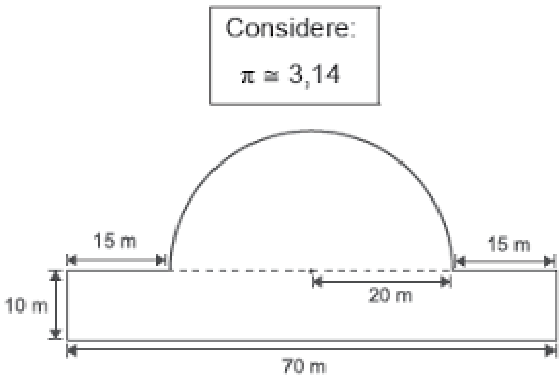
O comprimento de fita gasto, em metros, para lacrar essa caixa foi

a) 1,8 b) 2,0 c) 1,0 d) 0,9 e) 0,5

6. Um terreno plano tem a forma de um trapézio, cujos lados paralelos medem 19 m e 24 m e os lados não paralelos medem, ambos, 16 m. O proprietário deseja cercar o terreno com uma cerca formada por quatro fios paralelos. Ele apurou que o metro do fio a ser utilizado custa R\$ 0,50. Quanto o proprietário deverá pagar pela quantidade de fio a ser usado?

   a) R\$ 118,00 b) R\$ 150,00 c) R\$ 172,00 d) R\$ 236,00 e) R\$ 300,00

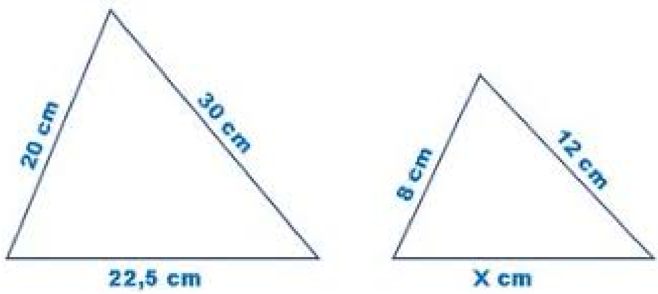
7. Letícia costuma caminhar em volta de uma praça formada por uma região retangular e um semicírculo. O contorno dessa praça está representado no desenho abaixo.



   Qual é a distância aproximada que Letícia percorre ao dar uma volta completa ao redor dessa praça?

   a) 18,2 b) 120 c) 182,8 d) 242,8 e) 268

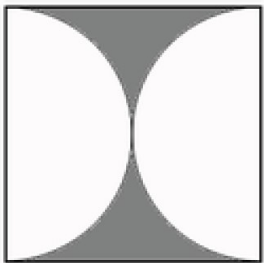
8. Os dois triângulos abaixo são semelhantes.



O perímetro, em centímetros, do menor triângulo é?

a) 20 b) 24 c) 28 d) 29 e) 30

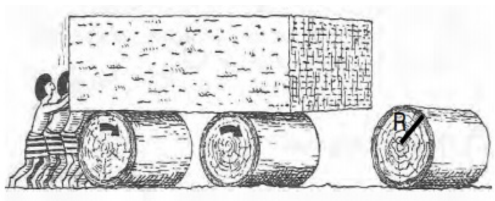
9. Um jardineiro fez um cercado quadrado com 10 m de lado, para plantar flores no formato da figura colorida abaixo. Em seguida, ele resolveu cercá-lo de tela.



A quantidade de tela, em metros, necessária para o jardineiro circundar a figura demarcada é:

a) 20 b) $20 + 10\pi$ c) $10 + 10\pi$ d) 10π e) 40

10. A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.



BOLT, Brian. **Atividades matemáticas**.Ed.Gradiva.

Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é

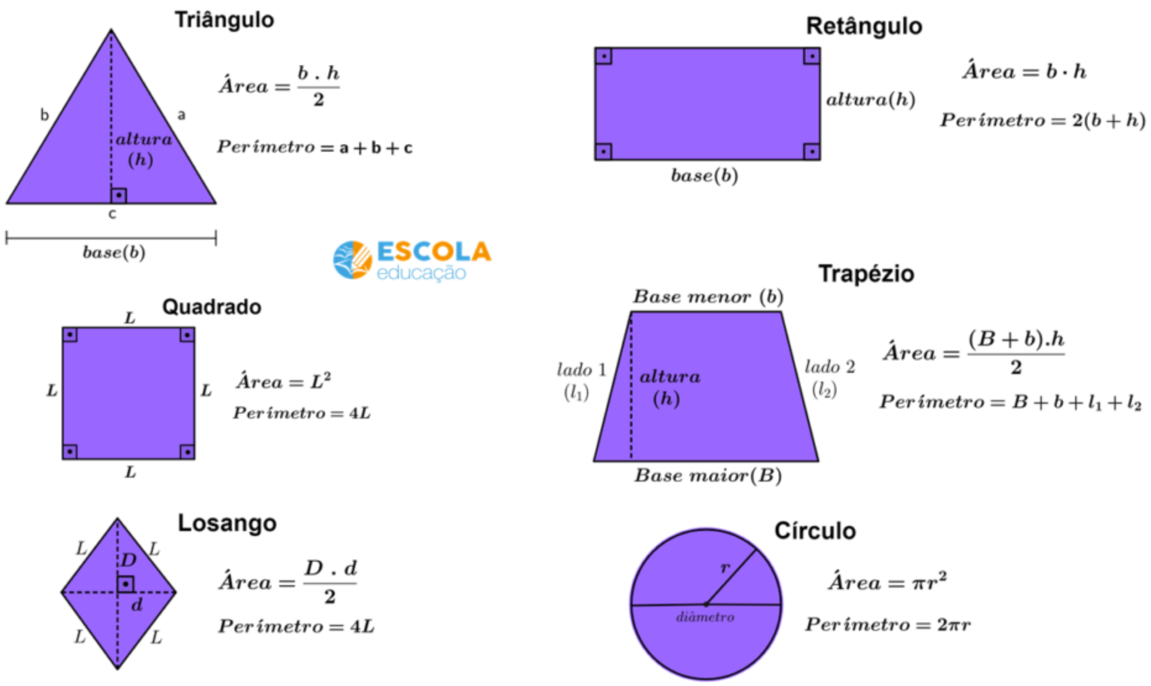
a) $y = R$ b) $y = 2R$ c) $y = 3R$ d) $y = 4R$ e) $y = 5R$

2.2 Descritor D_{12} - Teoria e Problemas

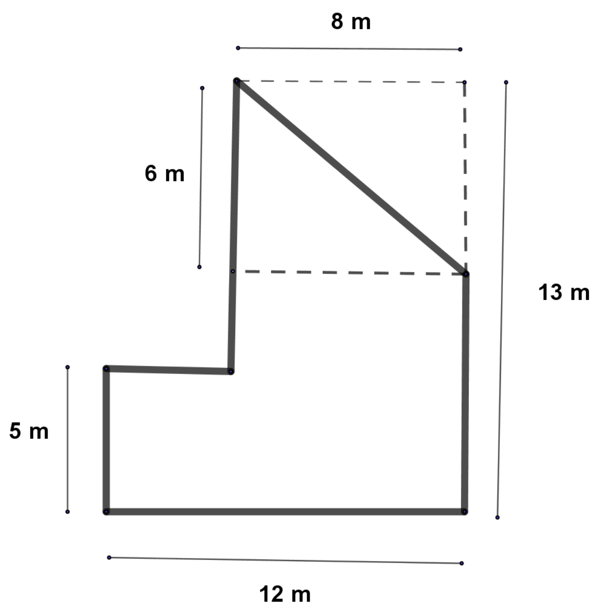
O descritor D_{12} está relacionado ao cálculo de áreas de figuras planas. Essa subárea da Geometria Plana é repleta de fórmulas, uma vez que o cálculo de área depende do formato da figura. Vamos apresentar algumas fórmulas e, posteriormente, realizar alguns exemplos de sua aplicação.

2.2.1 Áreas de Figuras Planas

Área é um conceito matemático que define uma quantidade preenchida em um espaço bidimensional. A unidade de medida de área depende da unidade de medida linear da figura (medidas dos comprimentos). É bom enfatizar que é necessário que todas as medidas da figura estejam na mesma unidade de medida para que possamos aplicar as fórmulas de cálculo de área. Na figura abaixo, temos algumas fórmulas para o cálculo de áreas das figuras planas mais usuais.



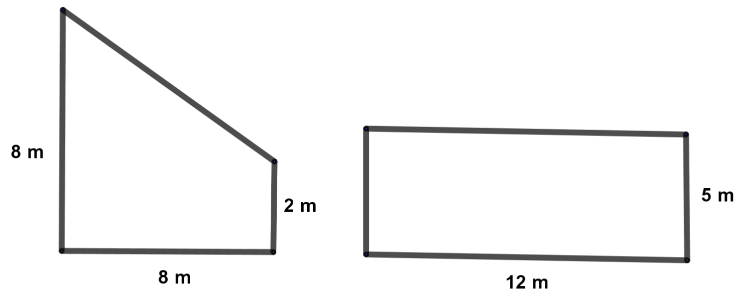
Exemplo 2.3 *O quintal de Sr. João tem o formato da figura abaixo, o qual será destinado ao plantio de grama.*



A área destinada ao plantio de grama, em m^2*, é de:*

a) 60 *b) 84* *c) 92* *d) 100* *e) 156*

Resolução 27 *Primeiramente, observemos que podemos decompor a figura em duas figuras: um trapézio e um retângulo.*



O trapézio possui base maior $B = 8\ m$, base menor $b = 2\ m$ e altura $h = 8\ m$. Usando a fórmula da área do trapézio, temos

$$A_{Trapézio} = \frac{(8+2)\times 8}{2} = 40\ m^2 \tag{2.1}$$

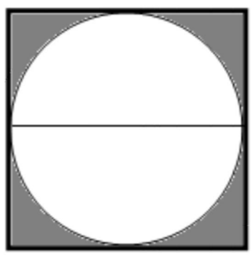
O retângulo possui base medindo 12 m e altura medindo 5 m. Assim,

$$A_{Retângulo} = 12 \times 5 = 60\ m^2 \tag{2.2}$$

Finalmente, a área destinada ao plantio de grama é o resultado da soma dos valores obtidos em (2.1) e (2.2). Logo,

$$Área = 40 + 60 = 100\ m^2$$

Exemplo 2.4 *A figura a seguir apresenta uma circunferência com 6 cm de diâmetro inscrita em um quadrado.*



A medida da área da parte hachurada, em cm^2 dessa figura é: Adote $\pi = 3,14$

a) 7,74 b) 18,84 c) 28,26 d) 30,21 e) 38,00

Resolução 28 *Para calcular a área da parte hachurada devemos fazer a diferença entre a área do quadrado e a área do círculo. Visto que o diâmetro do círculo é de 6 cm, temos que o lado do quadrado mede 6 cm. Portanto a área do quadrado é de:*

$$A_{quadrado} = 6^2 = 36\ cm^2$$

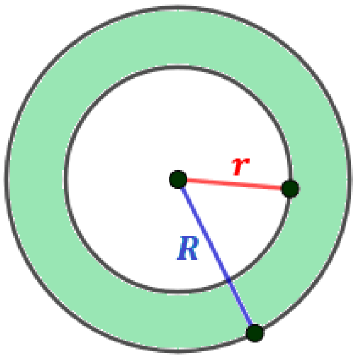
O raio do círculo é de 3 cm, uma vez que o raio é a metade do diâmetro. Assim,

$$A_{círculo} = \pi \times 3^2 = 3,14 \times 9 = 28,26\ cm^2$$

Usando essas duas áreas calculadas, temos que:

$$Área = 36 - 28,26 = 7,74 \ cm^2$$

Uma forma importante que percorre muito em problemas de geometria plana é a **coroa circular**. Se trata do complementar da intersecção de dois círculos concêntricos (mesmo centro) e de raios distintos.



A área da coroa circular é a diferença entre duas áreas de círculos com raios R e r, respectivamente. Assim, a fórmula para a área do setor circular é dada por

$$A = \pi \times (R^2 - r^2)$$

Exemplo 2.5 *Observe a figura que representa a catraca de uma bicicleta.*

www.biketechmogi.com.br/(...)10v_T.JPG. Acesso em: 7 jul. 2010. (Adaptada).

Considere que a menor circunferência da catraca tem 5 cm de raio (r), e a circunferência maior tem 10 cm de raio (R). A área aproximada, em cm^2, da coroa circular dessa catraca é de

a) 235,5 *b) 245,5* *c) 255,5* *d) 266,5* *e) 275,5*

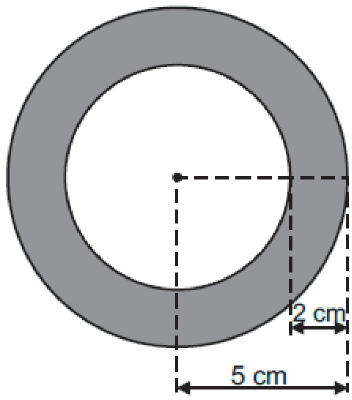
Resolução 29 *Devemos aplicar a fórmula para o cálculo de área de uma coroa circular, com $R = 10$ cm e $r = 5$ cm. Adotando $\pi \approx 3,14$, obtemos*

$$Área = 3,14 \times (10^2 - 5^2) = 3,14 \times 75 = 235,5 \ cm^2$$

2.2.2 Problemas Propostos

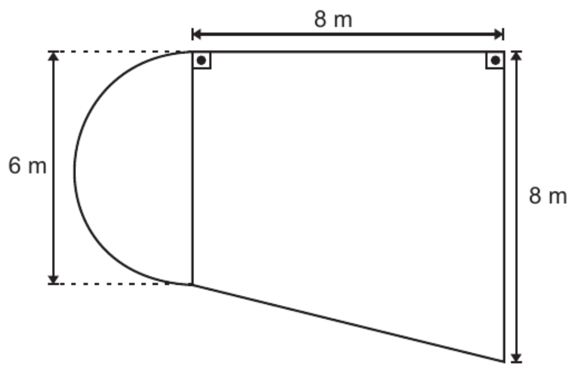
1. Uma quadra de voleibol possui a forma retangular cujas medidas são 20 metros no comprimento e 6 metros na largura. Uma rede divide a quadra em duas partes de mesma área. O tamanho, em m^2, correspondente a uma dessas partes é:
   a) 20 b) 40 c) 60 d) 80 e) 100

2. O desenho abaixo é formado por dois círculos concêntricos.



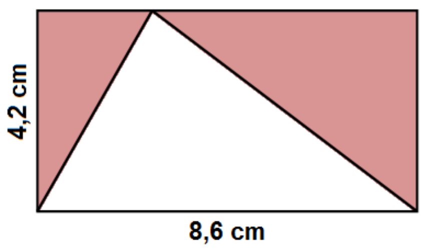
   Qual é a medida da área, em cm^2, da parte colorida de cinza?
   a) 34π b) 25π c) 21π d) 16π e) 13π

3. O desenho abaixo representa a vista superior de um palco montado para um show na praia. A forma desse palco é composta por um trapézio e um semicírculo justapostos.



   A medida da área destinada a esse palco, em metros quadrados, é igual a: *Adote* $\pi = 3,14$
   a) 45,95 b) 65,30 c) 69,95 d) 47,60 e) 83,90

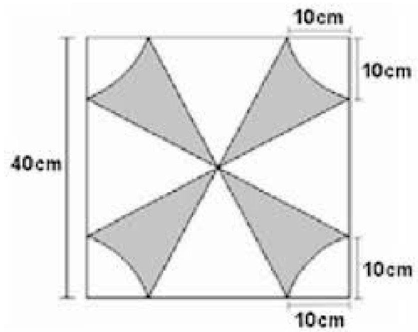
4. Na figura abaixo, ABCD é um retângulo, com 8,6 cm de comprimento e 4,2 cm de altura.



A área da superfície rosa, em cm^2 é:

a) 12,80 b) 18,06 c) 25,60 d) 36,12 e) 53,76

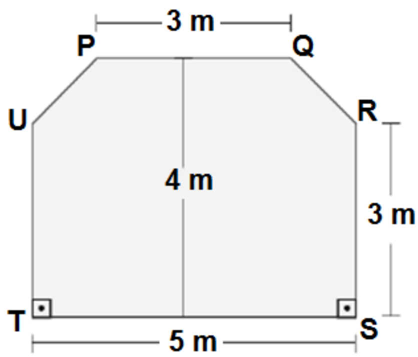
5. Paulo resolve modificar o revestimento do piso de sua sala de estar e escolhe uma cerâmica cujo formato está representado na figura a seguir. A cerâmica escolhida tem a forma de um quadrado cujo lado mede 40 cm e possui 4 arcos de circunferência, de raio igual a 10 cm, cujos centros estão localizados nos vértices do quadrado.



Com base nessas informações, qual é a área do desenho formado na cerâmica, em centímetros quadrados? *Adote* $\pi = 3,14$

a) 314 b) 400 c) 486 d) 1114 e) 1286

6. No polígono da figura abaixo, PQ é paralelo a TS e UT é paralelo a RS.



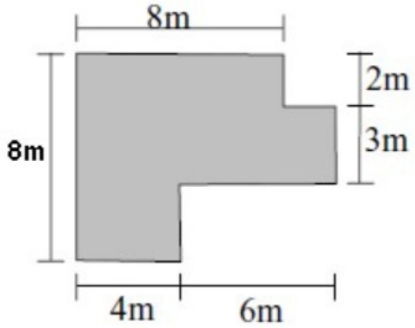
A medida da área desse polígono, em metros quadrados, é

a) 15 b) 19 c) 20 d) 23 e) 24

7. Pretendo comprar 20 peças quadradas de mármore, sendo 10 peças de cada tipo de revestimento. Essas peças medem, respectivamente, 30 cm e 40 cm de lado. A soma total das áreas das peças de mármore, em metros quadrados, que quero adquirir é igual a

   a) 1,0 b) 1,5 c) 2,0 d) 2,5 e) 3,0

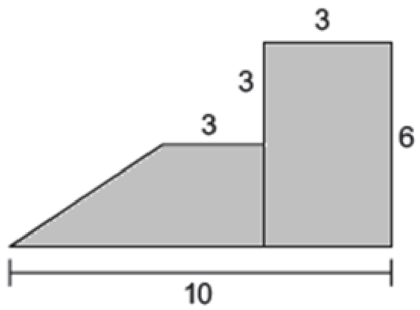
8. A figura abaixo representa a planta de um apartamento.



   A área total, me metros quadrados, é de:

   a) 56 b) 58 c) 62 d) 64 e) 80

9. A figura, abaixo, mostra uma logomarca formada por um retângulo e um trapézio cujas medidas estão expressas em centímetros.



   Qual a medida da área, em cm^2, dessa logomarca?

   a) 18 b) 25 c) 33 d) 39 e) 60

10. Foi realizada uma manifestação para chamar a atenção das pessoas para o problema do aquecimento global, em uma praça retangular de 250 metros de comprimento por 50 metros de largura. Segundo os organizadores, havia, em média, sete pessoas para cada 2 metros quadrados. Pode-se afirmar que o número aproximado de pessoas presentes na manifestação foi de:

    a) 25.610.

    b) 38.950.

    c) 43.750.

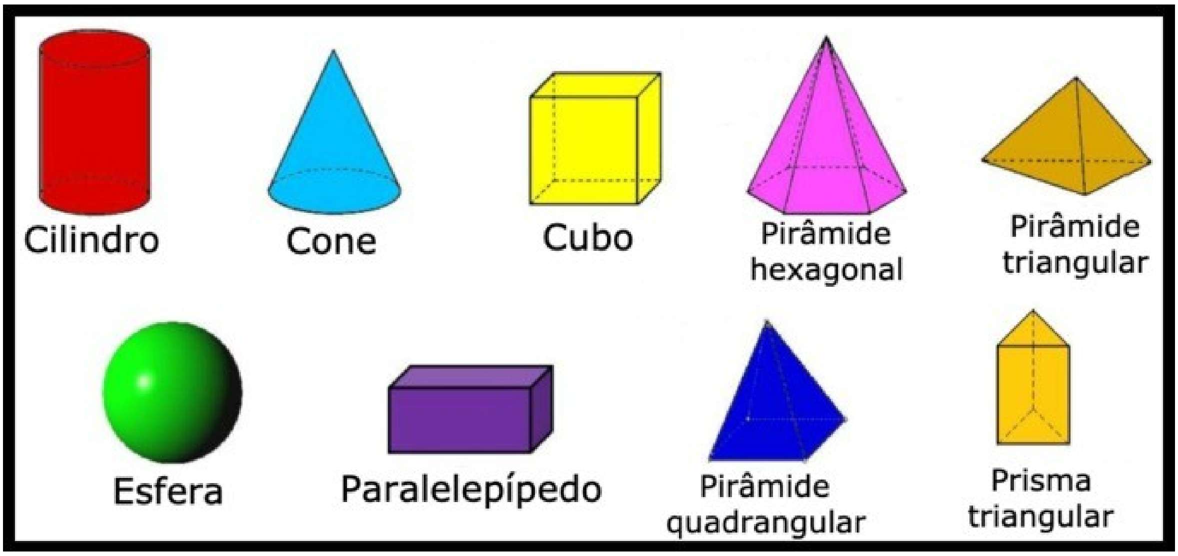
    d) 47.630.

    e) 51.940.

2.3 Descritor D_{13} - Teoria e Problemas

O descritor D_{13} está relacionado ao cálculo de volume de sólidos, sejam eles prismas, pirâmides ou corpos redondos. Além dessa parte da geometria espacial, D_{13} explora também o cálculo da área lateral e área total de um sólido. Enfatizamos que o cálculo de volume, área lateral ou área total estão associados a várias fórmulas. .

Vamos discutir meios que nos permite calcular volume e área lateral de sólidos geométricos tais como os descritos abaixo.



2.3.1 Volume de um Prisma

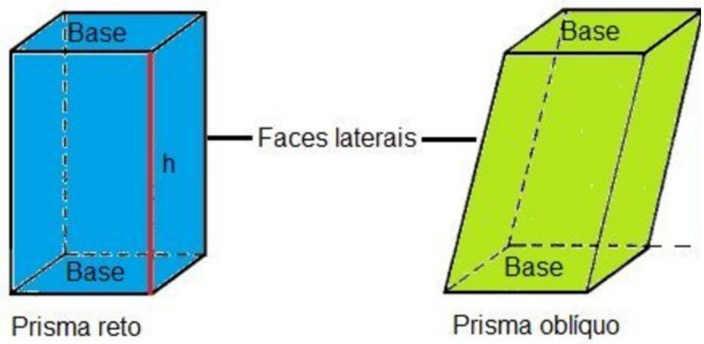
A **geometria espacial** é a análise de sólidos no espaço, ou seja, é a geometria para objetos tridimensionais, diferente da geometria plana, que é o estudo de figuras bidimensionais. Assim como esta, aquela surge com base em conceitos primitivos, sendo eles: ponto, reta, plano e espaço.

Olhando para o objetivo de se trabalhar o descritor D_{13}, vamos focar em:

- Volume de Sólidos;
  - Prismas
  - Pirâmides
  - Corpos redondos
- Área Lateral;
- Área Total;

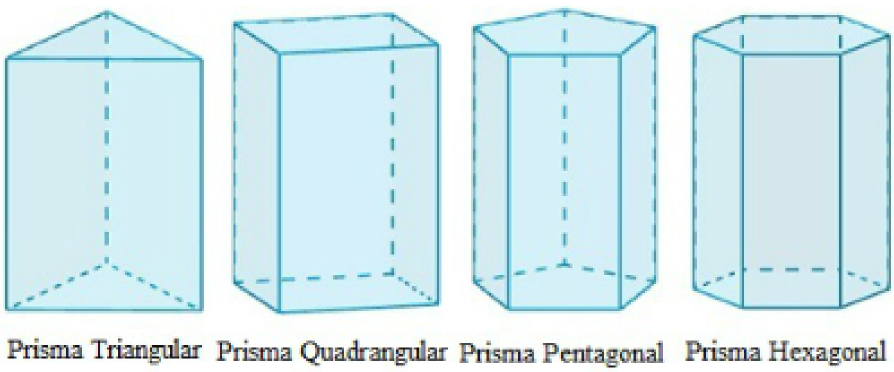
O **prisma** é um sólido geométrico que faz parte dos estudos de geometria espacial. É caracterizado por ser um poliedro convexo com duas bases (polígonos iguais) congruentes e paralelas, além das faces planas laterais (paralelogramos). Eles são classificados em dois tipos:

- **Prisma reto**: possui arestas laterais perpendiculares à base, cujas faces laterais são retângulos.
- **Prisma Oblíquo**: possui arestas laterais oblíquas à base, cujas faces laterais são paralelogramos



De acordo com o formato das bases, os primas são classificados em:

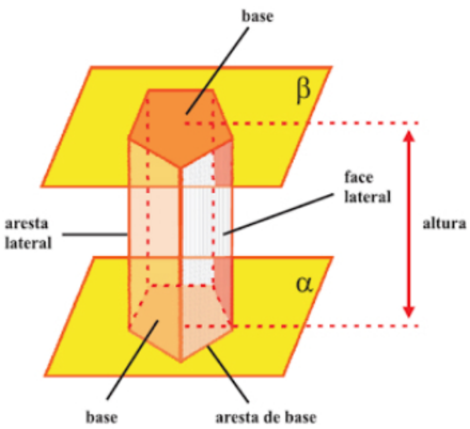
- **Prisma Triangular**: base formada por triângulo.
- **Prisma Quadrangular**: base formada por quadrado.
- **Prisma Pentagonal:** base formada por pentágono.
- **Prisma Hexagonal:** base formada por hexágono.
- **Prisma Heptagonal:** base formada por heptágono.
- **Prisma Octogonal:** base formada por octógono.



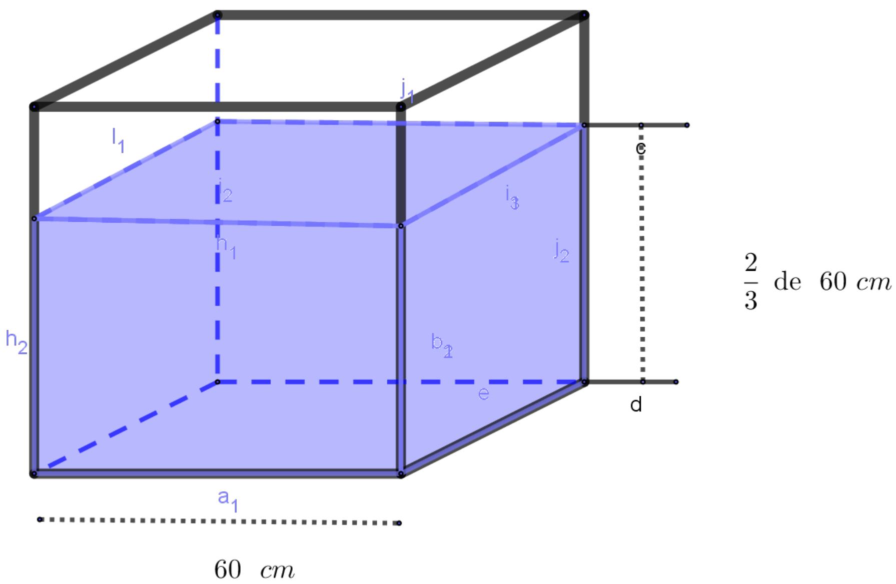
O volume de um prisma (sua capacidade) é calculada por meio da fórmula

$$V = A_b \times h$$

- V **indica o volume (em unidades cúbicas)**
- A_b **indica o valor da área da base;**
- h **representa a altura do prisma medida como sendo a distância entre as duas bases (Sempre ortogonalmente a base).**



Exemplo 2.6 *Um reservatório cúbico de 60 cm de profundidade, está com 2/3 de água e precisa ser totalmente esvaziado. O volume de água a ser retirado desse reservatório, em litros, é de*



a) 14 *b) 14,4* *c) 144* *d) 72* *e) 720*

Resolução 30 *Iniciamos observando que*

$$\frac{2}{3} \;\; de \;\; 60 \;\; cm \;=\; \frac{2}{3} \times 60 = 40 \; cm$$

Essa medida indica o nível de água do reservatório. Portanto, a altura do prisma que usaremos no cálculo do volume.

A base do reservatório é uma quadrado de lado 60 *cm. Portanto, a área do quadrado é a área da base do prisma em questão.*

$$A_b = 60^2 = 3600\ cm^2$$

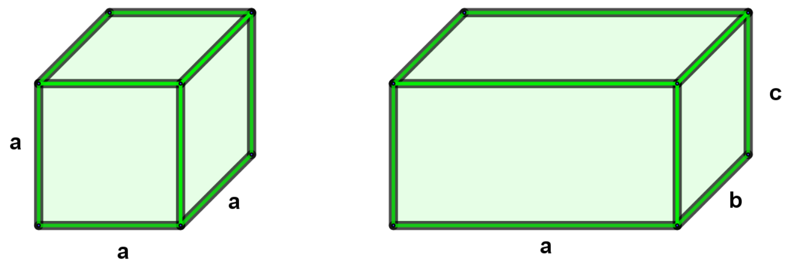
Segue que o volume V *é*

$$V = 3600 \times 40 = 144000\ cm^3$$

Como $1\ cm^3 = 1\ mL$ *e* $1000\ mL = 1\ L$ *(um litro), temos*

$$V = 144000\ cm^3 = 144000\ mL = 144\ L$$

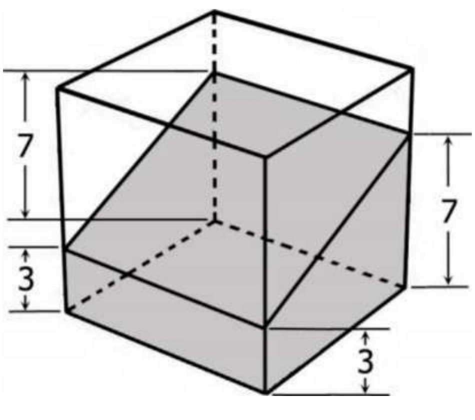
O cubo e o paralelepípedo são prismas especiais e o volume de cada um deles são dados abaixo:



Cubo
$\boldsymbol{V = a^3}$

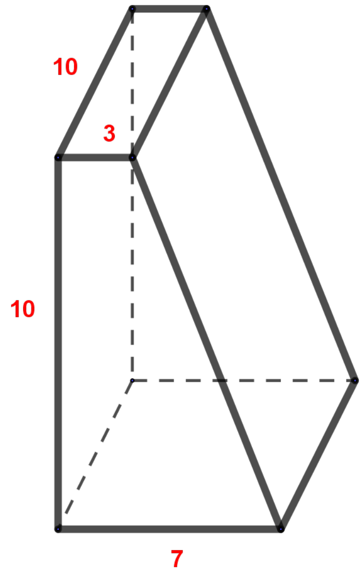
Paralelepípedo
$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$

Exemplo 2.7 *No cubo de aresta 10, da figura abaixo, encontra-se representado um sólido sombreado com as alturas indicadas no desenho. O volume do sólido sombreado é*



a) 300 *b) 350* *c) 500* *d) 600* *e) 700*

Resolução 31 *Note que o volume a ser calculado é o do sólido*



Esse é um prisma com base em forma de trapézio, com base maior $B = 7$, base menor $b = 3$ e altura $h = 10$. Portanto, a área da base é

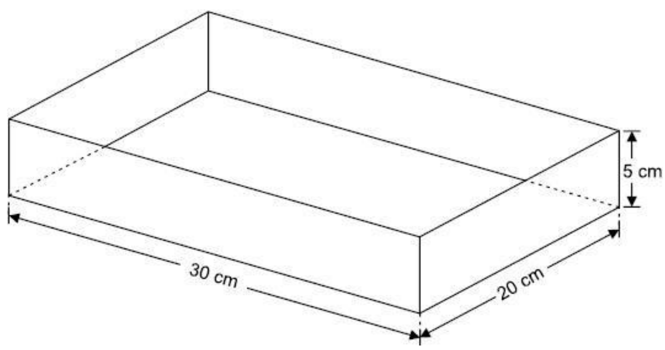
$$A_b = A_{Trápezio} = \frac{(7+3)\times 10}{2} = 50 \textit{ unidade de área}$$

A altura do prisma é a medida da aresta do cubo (valor 10). Assim, temos que o volume do prisma é

$$V = A_b \times 10 = 50 \times 10 = 500 \textit{ unidade de volume}$$

2.3.2 Problemas Propostos

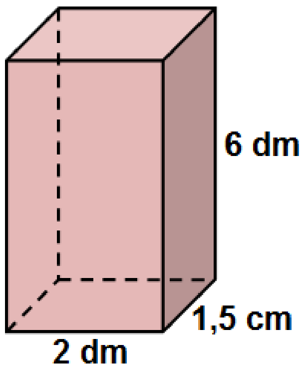
1. Amanda comprou uma forma de bolo com formato de bloco retangular , cujas medidas internas estão representadas na figura abaixo.



A capacidade máxima, em cm^3, dessa forma é

a) 220 b) 500 c) 600 d) 1100 e) 3000

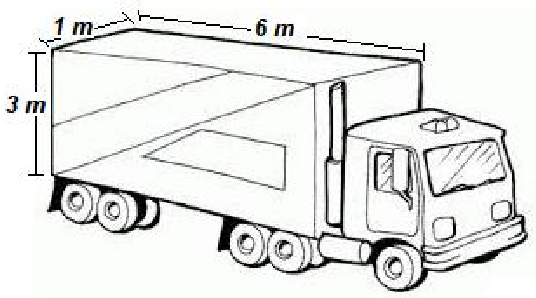
2. Na figura abaixo, o bloco retangular representa uma lata de tinta para paredes completamente cheia. Observe as dimensões dessa lata

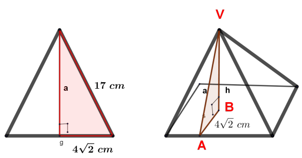


O volume de tinta dessa lata, em decímetros cúbicos, é

a) 12 b) 15 c) 18 d) 24 e) 26

3. As medidas internas da carroceria de certo caminhão são de 1 metro de altura, 6 metros de comprimento e 3 metros de largura. Esse caminhão transportará tijolos cujas medidas são mostradas na figura.

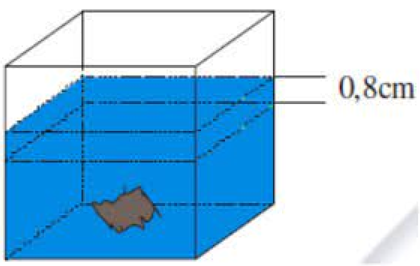




O número total de tijolos que esse caminhão suporta carregar é igual a

a) 9000 b) 9100 c) 9200 d) 9300 e) 9400

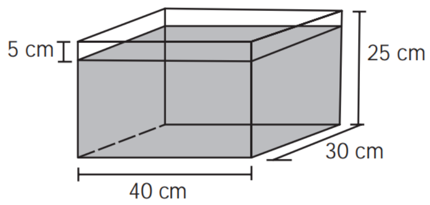
4. Um aquário tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e contém água até certa altura. As medidas internas da base do aquário são 40 cm por 25 cm. Quando uma pedra é colocada dentro do aquário, ficando totalmente submersa, o nível da água sobe 0,8 cm.



O volume da pedra é, em cm^3, igual a

a) 100 b) 300 c) 400 d) 600 e) 800

5. Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostra a figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2.400 cm^3?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.

b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.

c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

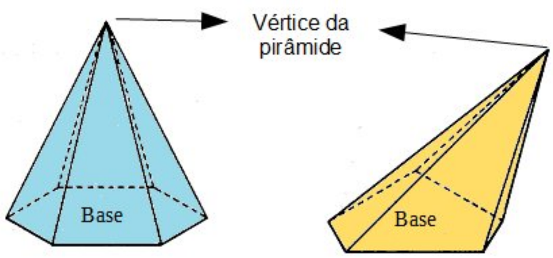
2.3.3 Volume de uma Pirâmide

A **pirâmide** é uma figura geométrica espacial, mais precisamente um poliedro.

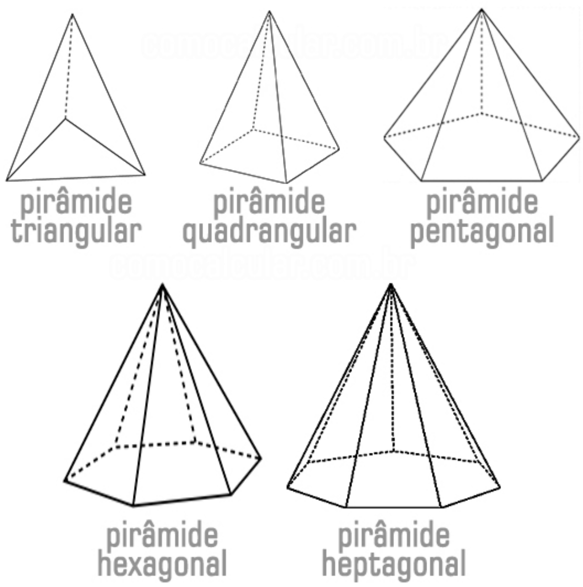
Ela é composta por uma base e um vértice. Sua base pode ser triangular, pentagonal, quadrada, retangular, paralelogramo.

Já o vértice, corresponde ao ponto mais distante da base da pirâmide e que une todas as faces laterais triangulares.

Em outros termos, a pirâmide é um sólido geométrico de base poligonal que possui todos os vértices num plano (plano da base). Sua altura corresponde a distância entre o vértice e sua base.

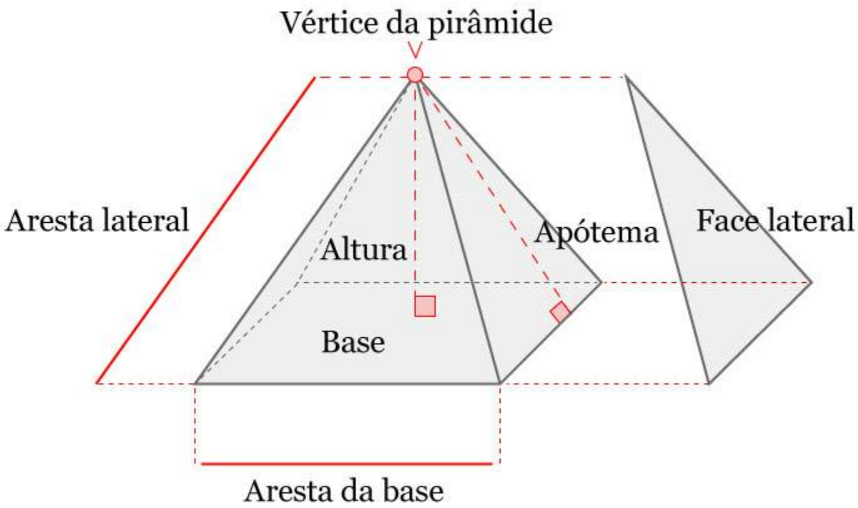


As Pirâmides podem ser classificadas quanto ao formato do polígono de sua base



É importante conhecer os seguintes elementos de uma pirâmide:

- Aresta Lateral, Aresta da Base, Vértice, Altura. Apótema Base e Face Lateral.



- **Base:** corresponde à região plana poligonal na qual se sustenta a pirâmide.

- **Altura:** designa a distância do vértice da pirâmide ao plano da base.

- **Arestas:** são classificadas em arestas da base, ou seja, todos os lados do polígono da base, e arestas laterais, segmentos formados pela distância do vértice da pirâmide até sua base.

- **Apótemas:** corresponde à altura de cada face lateral; são classificadas em apótema da base e apótema da pirâmide.

- **Superfície Lateral:** É a superfície poliédrica composta por todas as faces laterais da pirâmide.

O volume de uma pirâmide é dado por

$$V = \frac{1}{3} \times (A_b \times h)$$

onde:

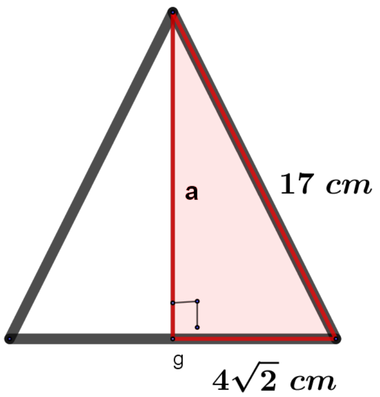
- A_b **é a área da base da pirâmide.**
- h **é a altura da pirâmide.**

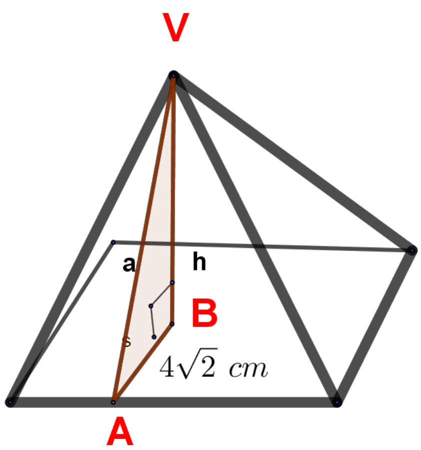
Note que o volume da pirâmide é igual a terça parte do volume de um prisma.

Exemplo 2.8 *A base de uma pirâmide reta é um quadrado cujo lado mede* $8\sqrt{2}$ *cm. Se as arestas laterais da pirâmide medem 17cm, o seu volume, em centímetros cúbicos, é:*

a) 520. *b) 640.* *c) 680.* *d) 750.* *e) 780.*

Resolução 32 *Para calcular o volume necessitamos de calcular a altura h da pirâmide. Para isso, devemos encontrar a apótema da face e usar desse valor para obter a altura. Veja a figura abaixo:*





Os triângulos destacados são ambos triângulos retângulos. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras: Faremos isso para calcular o valor de a e, posteriormente, para calcular o valor de h.

$$17^2 = a^2 + (4\sqrt{2})^2 \quad \textit{implica que} \quad 289 = a^2 + 32, \quad \textit{logo} \quad a^2 = 257 \tag{2.3}$$

Usando (2.3) e novamente o Teorema de Pitágoras

$$a^2 = h^2 + (4\sqrt{2})^2 \quad \textit{implica que} \quad 257 = a^2 + 32, \quad \textit{logo} \quad h = 15 \ cm \tag{2.4}$$

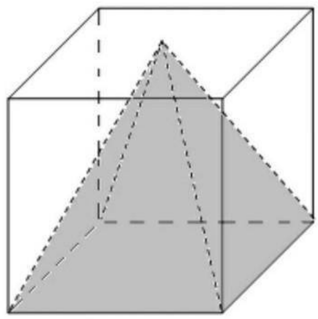
Portanto, usando (2.4) e a fórmula do volume da pirâmide

$$V = \frac{1}{3} \times ((8\sqrt{2})^2 \times 15) = 128 \times 5 = 640\ cm^3$$

2.3.4 Problemas Propostos

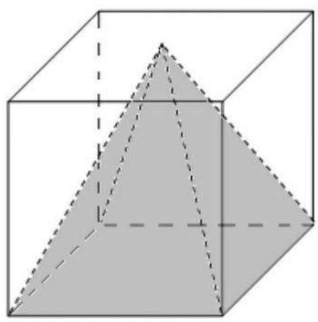
1. Uma pirâmide regular de base hexagonal é tal que a altura mede 8cm e a aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm. O volume dessa pirâmide, em centímetros cúbicos, é
   a) $24\sqrt{3}$. b) $36\sqrt{3}$. c) $38\sqrt{3}$. d) $72\sqrt{3}$. e) $144\sqrt{3}$.
   Use que a área do triângulo equilátero é $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$, onde ℓ é a medida do lado do triângulo.

2. Um empresário produz sólidos pedagógicos de plástico, como por exemplo, pirâmides. Ele quer embalá-las em caixas no formato de um cubo, sabendo que a pirâmide está inscrita, como mostra a figura abaixo.



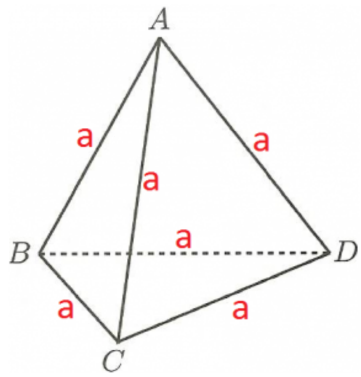
   Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3, então o volume do cubo, em m^3, é igual a:
   a) 9 b) 12 c) 15 d) 18 e) 21

3. Uma pirâmide é mergulhada num aquário cúbico cheio d'água, como na figura.



   O número que expressa a relação entre a quantidade de água final no aquário e a inicial (antes de mergulhar a pirâmide) é de, aproximadamente,
   a) 25% b) 33% c) 50% d) 67% e) 72%

4. O tetraedro regular é uma pirâmide cuja base e as três faces são triângulos equiláteros. A figura abaixo mostra um tetraedro regular de aresta a



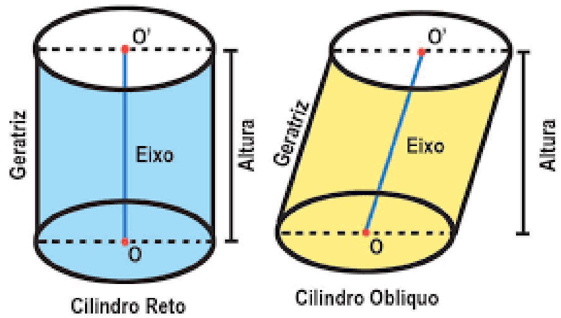
cujo o volume é calculado por
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$
O volume, metros cúbicos, de um tetraedro regular cuja aresta mede $3\sqrt{2}\ m$ é:,
a) 4 b) 9 c) 12 d) 27 e) 32

5. São dados dois planos paralelos distantes de 5 cm. Considere em um dos planos um triângulo ABC de área 30 cm^2 e no outro plano um ponto qualquer O. O volume do tetraedro ABCO, em cm^2, é:
a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

2.3.5 Volume do Cilindro

Cilindro é uma forma geométrica tridimensional formada por duas bases circulares em planos distintos e paralelos e por todos os pontos entre essas bases. Para esta figura, destacaremos três tipos de medidas:

- Volume do Cilindro
- Área Lateral
- Área Total



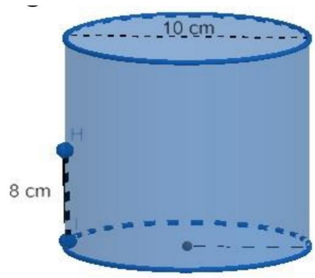
O volume do cilindro é dado por

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

onde:

- r **é o raio da base;**
- h **é a altura do cilindro.**

Exemplo 2.9 *Uma pessoa comprou um litro de leite, e, após beber certa quantidade, colocou o restante dele em uma caneca de alumínio na forma de um cilindro circular reto, com 10 cm de diâmetro interno, conforme ilustra a figura:*



Sabendo-se que o leite, ao ser colocado na caneca, atingiu a altura de 8 cm, pode-se concluir corretamente que a quantidade de leite, em ml, que a pessoa havia bebido antes de colocá-lo na caneca era (Adote $\pi = 3$):

a) 300 *b) 350* *c) 400* *d) 450* *e) 500*

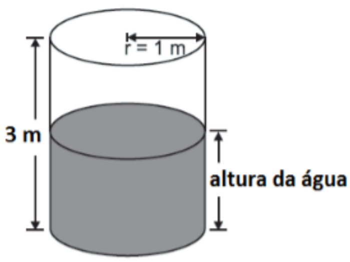
Resolução 33 *Se o diâmetro da base é 10 cm, temos que o raio da base é igual a 5 cm. A altura do cilindro (volume que deve ser calculado) é de 8 cm. Assim, o volume é de:*

$$V = 3 \times 5^2 \times 8 = 600\ cm^3 = 600\ ml$$

Como a pessoa comprou um litro de leite, restaram 400 ml.

2.3.6 Problemas Propostos

1. Observe abaixo o desenho de um reservatório no formato de um cilindro circular reto que contém água até a metade de sua altura total.



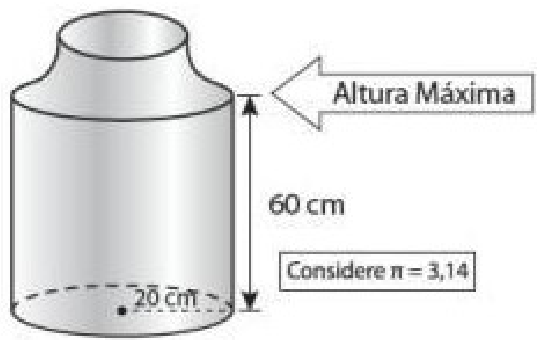
Nesse desenho, as medidas indicadas correspondem às dimensões internas desse reservatório. Qual é o volume, em m^3, de água contido nesse reservatório?

a) $1,5\pi$ b) 2π c) $2,5\pi$ d) 6π e) 12π

2. Um copo cilíndrico, com 4 cm de raio e 12 cm de altura, está com água até a altura de 8 cm. Foram então colocadas em seu interior n bolas de gude, e o nível da água atingiu a boca do copo, sem derramamento. Qual é o volume, em cm^3 , de todas as n bolas de gude juntas?

a) 32π b) 48π c) 64π d) 80π e) 96π

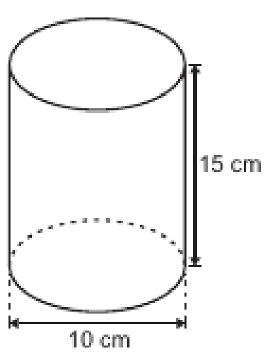
3. O leite produzido em uma fazenda é transportado em galões que são recipientes cilíndricos, como o da figura abaixo. Para não entornar durante o transporte, cada galão terá a sua capacidade máxima atingida, quando o nível do leite estiver a uma altura de 60 cm em relação ao fundo, conforme indicado na figura abaixo.



Mauro comprou um galão como esse contendo leite até sua capacidade máxima. Ele vai vender todo o conteúdo do galão em garrafas que contém 1 litro cada uma. Quantas dessas garrafas, no máximo, Mauro pode vender?

a) 24 b) 75 c) 240 d) 750 e) 800

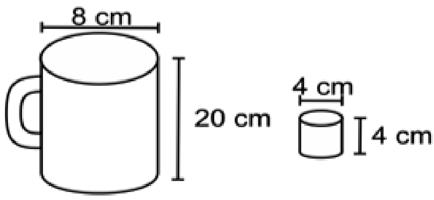
4. Um fabricante de sabão em pó decidiu remodelar a embalagem de seu produto, criando um novo padrão com o formato de um cilindro reto. A figura abaixo representa essa nova embalagem com as suas medidas internas indicadas.



A quantidade máxima, aproximada, de sabão em pó, em cm^3, que essa embalagem comporta é

a) 235,5 b) 471 c) 1177,5 d) 3532,5 e) 4710

5. Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

a) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

b) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

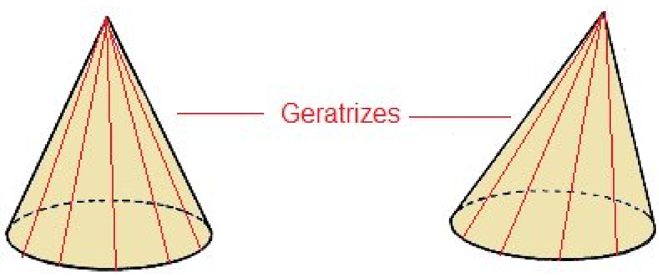
c) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

d) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

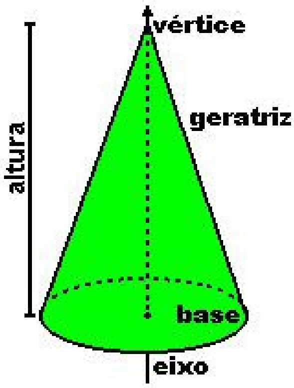
e) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

2.3.7 Volume do Cone

Ao estudarmos Geometria nos deparamos com várias situações geométricas, alguns sólidos possuem origem e fundamentos na sua formação, um deles é o **cone**, figura presente no cotidiano. Dado um círculo de centro O e raio r no plano α, e um ponto V fora do plano. O cone será formado por segmentos de reta unindo o ponto vértice aos pontos do círculo. Conforme a Figura



Para o cone destacamos: A altura, vértice e a geratriz do cone.



O volume do cone é dado por

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

onde:

- r **é o raio da base;**
- h **é a altura do cone.**

Observemos, como feito para a pirâmide, o volume do cone equivale a terça parte do volume do cilindro.

Exemplo 2.10 *A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 20π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é*

a) 10π *b)* 100π *c)* 1000π *d)* 3000π *e)* 30000π

Resolução 34 *Relembremos que o comprimento da circunferência é calculado por $c = 2\pi r$. Usando esta fórmula, temos que*

$$2\pi r = 20\pi \quad implica\ que \quad r = 10\ cm$$

Sendo a altura do cone igual ao triplo da medida do raio da base, temos que $h = 30$ cm. Segue que o volume do cone é

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times 30 = 1000\pi\ cm^3$$

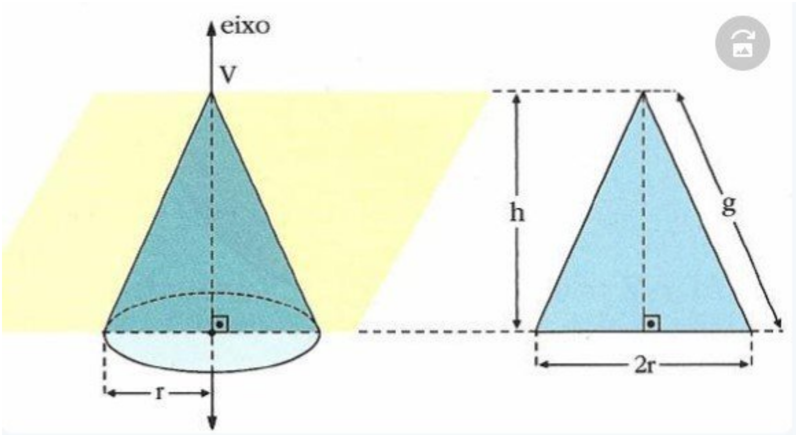
Exemplo 2.11 *Dois cones de mesma base têm alturas iguais a 18 cm e 6 cm, respectivamente. A razão de seus volumes é:*

a) 2 *b) 3* *c) 4* *d) 5* *e) 6*

Resolução 35 *Note que se os cones possuem a mesma base, então possuem o mesmo* *raio* r*. Portanto, a razão entre os volumes é*

$$\textit{razão} = \underbrace{\frac{\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times 18}{\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times 6}}_{\textit{simplificando os termos destacados}} = \frac{18}{6} = 3$$

A **seção meridiana** do cone circular reto é a interseção do cone com um plano que contem o eixo do cone, conforme indica a figura abaixo



Observe que a geratriz g, o raio da base r e a altura h satisfaz a relação

$$g^2 = h^2 + r^2$$

2.3.8 Problemas Propostos

1. A altura de um cone circular reto mede o dobro da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 6π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é

   a) 10π b) 12π c) 18π d) 20π e) 22π

2. Um bloco maciço de pedra com a forma de cubo foi explodido para a produção de areia. Quando essa areia foi descarregada da caçamba do caminhão de transporte, ela formou um cone circular reto maciço de altura 3 metros e perímetro da base 18 metros.

   Adotando $\pi = 3$ nos cálculos finais, a aresta do bloco cúbico de pedra que gerou a areia transportada, em metros, era igual a

   a) 2,8 b) 3,0 c) 3,3 d) 3,6 e) 3,9

3. Qual o volume, em m^3, de um cone circular reto cujo raio da base mede 3 m e geratriz 5 m?

   a) 2π b) 10π c) 12π d) 8π e) 18π

4. O raio da base de um cone circular reto e a aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular têm mesma medida. Sabendo que suas alturas medem 4 cm, então a razão entre o volume do cone e o da pirâmide é:

   a) 1 b) 4 c) π d) $1/\pi$ e) 3π

5. O raio da base de um cone circular reto mede 3 m e o perímetro de sua seção meridiana mede 16 m. O volume desse cone mede:

   a) 8π b) 10π c) 14π d) 12π e) 36π

2.3.9 Área Lateral e Área Total

Iremos discutir nesse espaço sobre a área lateral e área total de sólido.

Os prismas são formados por duas bases poligonais, paralelas e composta por faces laterais que são retângulos. A área lateral (A_L) de um prisma é soma das áreas dos retângulos laterais

$$A_L = \text{Soma das áreas dos retângulos que compoem as faces laterais}$$

Se o polígono da base for regular de n lados medindo a, então

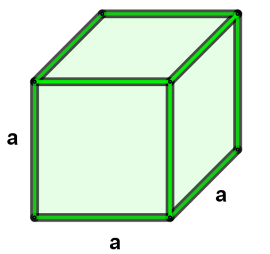
$$A_L = n \cdot a \cdot h$$

onde, h é a altura do prisma.

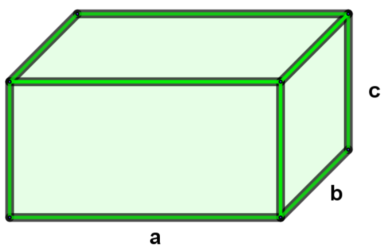
Em todos os casos, a área total (A_T) é dada por

$$A_T = \underbrace{A_L + 2 \times A_b}_{\text{Área Lateral + 2 x Área da Base}}$$

- **Cubo e Paralelepípedo**



Cubo
Área Lateral $= 4 \cdot a^2$
Área Total $= 6 \cdot a^2$



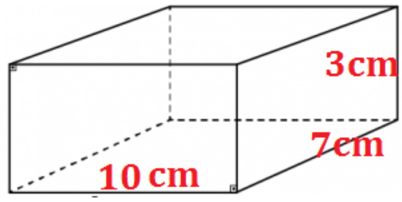
Paralelepípedo
Área Lateral $= 2 \cdot (a \cdot c + b \cdot c)$
Área Total $= 2 \cdot (a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b)$

Exemplo 2.12 *Qual é a área total, em cm^2, de um cubo cuja aresta mede 4 cm?*

a) 16 b) 48 c) 64 d) 96 e) 100

Resolução 36 *Área total é dada por $A_T = 6 \times 4^2 = 6 \times 16 = 96\ cm^2$.*

Exemplo 2.13 *Bárbara desenhou um paralelepípedo retângulo, como mostra a figura abaixo.*

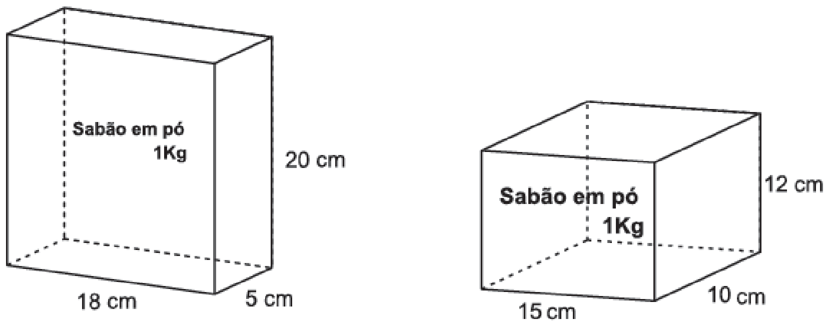


Qual é a medida da área total, em cm^2 desse paralelepípedo?

a) 100 b) 110 c) 121 d) 144 e) 150

Resolução 37 *Área total é dada por $A_T = 2 \times (10 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 10 \cdot 3) = 121\ cm^2$.*

Exemplo 2.14 *Para economizar papelão, um fabricante de sabão em pó mudou as dimensões da embalagem de 1 Kg. As duas embalagens, antiga e nova, têm o formato de um paralelepípedo retângulo e suas dimensões estão indicadas no desenho abaixo, respectivamente.*



Considerando-se as medidas dadas e apenas a área externa das caixas, a economia de papelão, em cm^2, que essa mudança resultou para a empresa, por caixa, foi de

a) 12 b) 60 c) 100 d) 200 e) 300

Resolução 38 *Devemos calcular a área total de ambas embalagens e realizar a comparação*

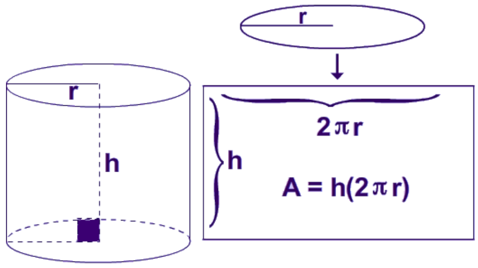
$$A_{antiga} = 2 \times (18 \cdot 5 + 5 \cdot 20 + 18 \cdot 20) = 1100\ cm^2$$

e

$$A_{nova} = 2 \times (15 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + 15 \cdot 12) = 900\ cm^2$$

Assim, a embalagem nova economiza $200\ cm^2$ em relação a embalagem antiga.

A planificação do cilindro é dada na figura abaixo

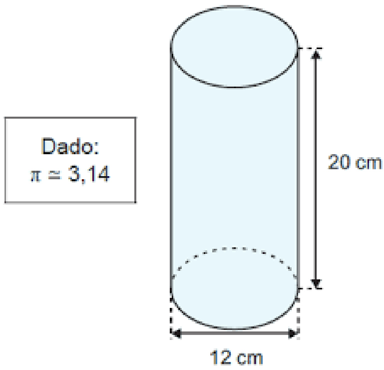


Esta planificação nos permite obter as seguintes fórmulas para área lateral e total do cilindro.

Dado um cilindro de raio da base r e altura h, temos as seguintes fórmulas para área lateral (A_L) e área total (A_T)

$$A_L = 2\pi r \times h \qquad e \qquad A_T = 2\pi r(h + r)$$

Exemplo 2.15 *Maria comprou uma orquídea, que veio plantada em um vaso cilíndrico, como representado no desenho abaixo.*



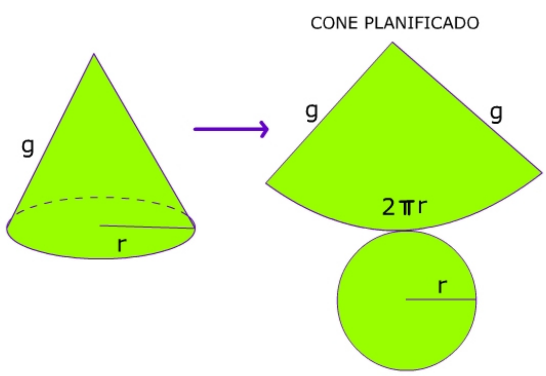
A medida da área total, em cm^2, desse vaso cilíndrico é

a) 133,04 *b) 376,8* *c) 866,64* *d) 1507,2* *e) 2260,8*

Resolução 39 *Note que no cálculo da área total do vaso, uma área da tampa será desconsiderada. Assim, calcularemos a área lateral e área de um círculo de raio 6 cm. Portanto*

$$A_T = 2 \times 3,14 \times 6 \times 20 + 3,14 \times 6^2 = 866,64\ cm^2$$

Para o cone reto, temos que a área lateral é a área de um setor circular de raio igual a medida da geratriz. A área total é a área desse setor adicionada a área do círculo da base.



Dado um cone reto de raio da base r, altura h e geratriz g, temos as seguintes fórmulas para área lateral (A_L) e área total (A_T)

$$A_L = \pi r \times g \qquad e \qquad A_T = \pi r(g + r)$$

Exemplo 2.16 *Sabendo-se que um cone circular reto tem 3 dm de raio e 15π dm^2 de área lateral, o valor de seu volume em dm^3 é:*

a) 9π *b)* 15π *c)* 36π *d)* 20π *e)* 12π

Resolução 40 *Se a área lateral é 15π dm^2 e $r = 3$, temos pela fórmula da área lateral que*

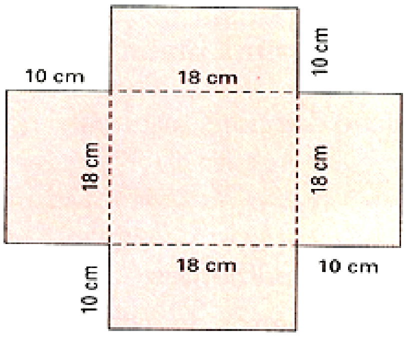
$$\pi \times 3 \times g = 15\pi \qquad \textit{implica que} \quad g = 5\ dm$$

Usando que $g^2 = r^2 + h^2$, obtemos que $h = 4$ dm. Portanto, o volume do cone é

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi\ dm^3$$

2.3.10 Problemas Propostos

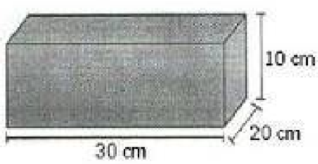
1. A planificação abaixo é a representação de uma caixa de papelão.



Quantos centímetros quadrados de papelão foram gastos para fazer a caixa?

a) 324 b) 360 c) 720 d) 1044 e) 2000

2. A figura abaixo representa uma caixa de sapatos.



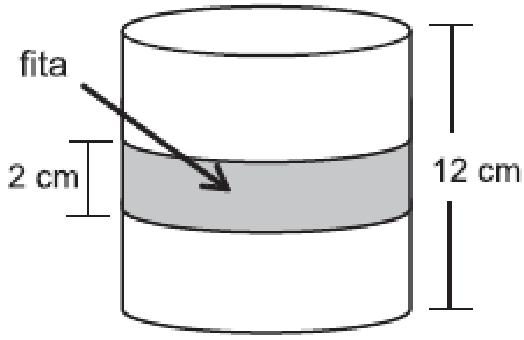
Com base na figura, a quantidade mínima de papel necessária, em metros quadrados, para embrulhar essa caixa é:

a) 0,10 b) 0,22 c) 0,51 d) 0,80 e) 1,00

3. Qual é a área total, em centímetros quadrados, de um cubo cuja aresta mede 5 cm?

   a) 20 b) 40 c) 50 d) 125 e) 150

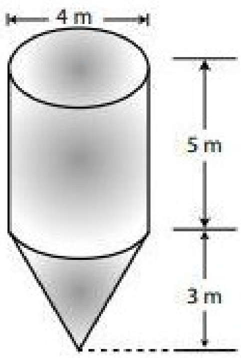
4. Uma fita retangular de 2 cm de largura foi colocada em torno de uma pequena lata cilíndrica de 12 cm de altura e $192\pi cm^3$ de volume, dando uma volta completa em torno da lata, como ilustra o modelo abaixo.



   A área da região da superfície da lata ocupada pela fita é, em cm^2 , igual a

   a) 8π b) 12π c) 16π d) 24π e) 32π

5. A figura, abaixo, representa um "silo", muito utilizado nas fazendas para armazenar grãos. Ele é composto de um cone e um cilindro e suas dimensões estão indicadas na figura abaixo.



   A área da região da superfície lateral do silo, em m^2 , igual a

   a) 8π

   b) $20\pi + \pi\sqrt{13}$

   c) $10\pi + 2\pi\sqrt{13}$

   d) $20\pi + 2\pi\sqrt{13}$

   e) $10\pi + 4\pi\sqrt{13}$

6. A área total, em centímetros quadrados, de um cone com 12 cm de raio e 16 cm de altura é:

   a) 38π b) 380π c) 384π d) 500π e) 520π

Capítulo 3

Números e Operações

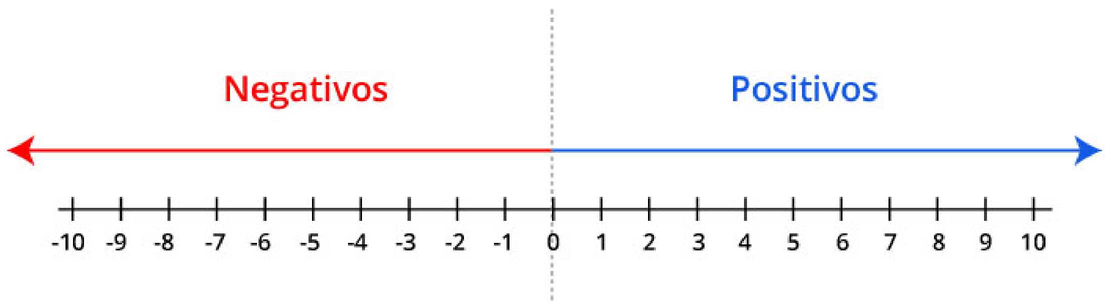
Neste capítulo, iremos discutir os descritores que estão relacionados ao tema **Números e Operações**. Veremos que os assuntos aqui tratados, estarão ligados a área de álgebra e aritmética. Traremos a teoria e os problemas relacionados a cada descritor, seguindo a mesma formação dos capítulos anteriores.

3.1 Descritor D_{14} - Teoria e Problemas

O descritor D_{14} está relacionado a identificação de números reais na reta numérica. Iremos explorar um pouco sobre a reta numérica e focar na resolução de problemas, Uma vez que os problemas são diversos, esse conhecimento da reta numérica é apenas uma tangente na resolução dos problemas.

3.1.1 Reta Numérica

A reta numérica é uma reta onde representamos de forma ordenada os números reais. Tais números podem ser frações (números racionais) ou dízimas não periódicas (números irracionais). Essa reta é simétrica, tendo o valor 0 (zero) como o centro da reta, destinando os números negativos a esquerda de zero e os positivos a direita de zero.



Os números representados na reta numérica acima são números inteiros e compõem o **conjunto dos números inteiros** $\mathbb{Z}$. Entre dois números inteiros existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais. Assim, dado um número real, devemos ser capaz de dizer se tal número é inteiro ou não. Caso não seja um número inteiro, devemos dizer entre quais números consecutivos ele está localizado. Isto é o mesmo que dizer em qual intervalo real o dado número pertence.

Exemplo 3.1 *Entre quais inteiros consecutivos está o número $\sqrt{18}$?*

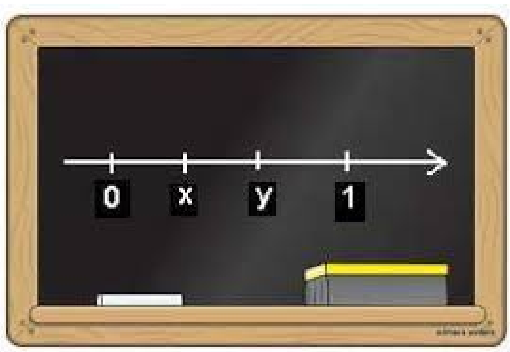
Resolução 41 *A primeira observação a ser feita é que se p e q são números positivos tais que $p < q$, então $\sqrt{p} < \sqrt{q}$. Usando isso, que é um fato da função $\sqrt{x}$ ser crescente, temos que*

$$16 < 18 < 25 \quad \textit{implica que} \quad 4 = \sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$$

Assim, $\sqrt{18}$ está entre os números inteiros 4 e 5.

O uso de estimativas também é explorado pelo descritor D_{14}. Vejamos por meio do exemplo a seguir:

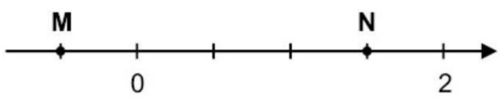
Exemplo 3.2 *Um professor de matemática representou geometricamente os números reais 0, x, y e 1 numa reta numérica.*



A posição do número $x \cdot y$ é:
a) à esquerda de 0.
b) entre 0 e x.
c) entre x e y.
d) entre y e 1.
e) à direita de 1.

Resolução 42 *Observe que x e y são positivos e menores do que 1. Assim, $0 < x \cdot y < x \cdot 1 = y$. Portanto $x \cdot y$ está entre 0 e x.*

Exemplo 3.3 *A representação da reta numérica abaixo está dividida em partes iguais*



Nessas condições qual o valor de $M + N$?

a) $1,5$ *b)* $1,0$ *c)* $0,5$ *d)* 0 *e)* $-0,5$

Resolução 43 *O intervalo de comprimento 2 foi dividido em quatro partes iguais. Portanto cada parte possui comprimento valendo* $2 \div 4 = 0,5$*. Assim, temos a seguinte decomposição para as marcações na reta*

$$\overbrace{-0,5}^{M} \quad - \quad 0 \quad - \quad 0,5 \quad - \quad 1,0 \quad - \quad \overbrace{1,5}^{N} \quad - \quad 2,0$$

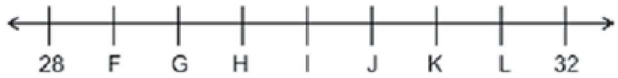
Portanto, $M + N = -0,5 + 1,5 = 1,0$*.*

3.2 Problemas Propostos

1. O valor de $\sqrt{7}$ é um número irracional. Esse valor está localizado entre os números naturais

   a) 1 e 2 b) 2 e 3 c) 3 e 4 d) 4 e 5 e) 5 e 6

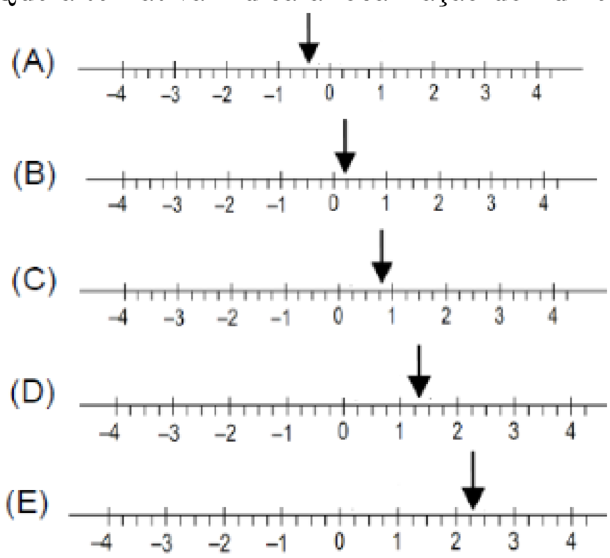
2. Observe a reta numérica abaixo, na qual estão representados números equidistantes 28, F, G, H, I, J, K, L, 32.

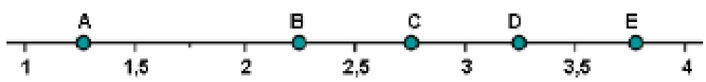
   Qual é o ponto correspondente ao número 30,5?

   a) G b) H c) I d) J e)K

3. Que alternativa indica a localização do número $\frac{2}{7}$ na reta numérica?

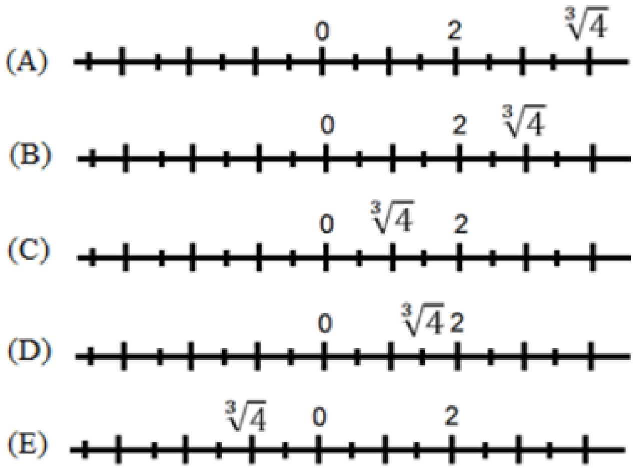
4. Um segmento de reta está desenhado conforme a figura abaixo. As letras A, B, C, D e E indicam pontos localizados no intervalo indicado.

O ponto que melhor representa o número $\sqrt{5}$ na reta dada é?

a) A b) B c) C d) D e) E

5. A professora de Márcio solicitou à turma que localizasse na reta numérica o número 34 . Identifique a alternativa que expressa esta situação de forma correta.



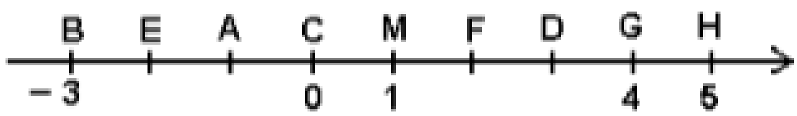
6. Observe a reta numérica abaixo. Ela está dividida em segmentos de mesma medida. Qual é o ponto que melhor representa a localização do número - 1,4 nessa reta?

a) P b) Q c) R d) S e) T

7. O número real

$$\sqrt{15-\sqrt{32+\sqrt{25-\sqrt{81}}}}$$

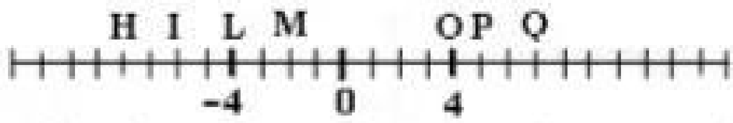
pode ser representado na reta numérica.



A correspondência correta é:

a) A b) B c) C d) D e) E

8. Observe a reta numérica a seguir



Considerando que $-4 < x < 4$, um dos pontos que x poderá assumir é

a) I b) P c) M d) H e) Q

3.3 Descritor D_{15} - Teoria e Problemas

No descritor D_{15}, trataremos de gradezas diretamente e inversamente proporcionais. Abordaremos neste descritor, problemas que envolvam o uso de regra de três simples ou regra de três composta na sua resolução.

3.3.1 Grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** se o aumento de uma implica proporcionalmente o aumento da outra grandeza. Problemas que envolvem duas ou mais grandezas diretamente proporcionais podem ser resolvidas usando **regra de três**. Esta regra permite comparar duas o mais grandezas.

Exemplo 3.4 *Um automóvel percorre 300 km com 25 litros de combustível. Caso o proprietário desse automóvel queira percorrer 120 km, quantos litros de combustível serão gastos?*

Resolução 44 *Note que temos duas grandezas:*

- *Distância em km*
- *Litros de Combustível*

e elas são diretamente proporcionais, pois notoriamente, com mais litros de combustível, percorremos uma distância maior. Para resolver, montamos a seguinte tabela e multiplicamos cruzado as informações

Distância		**Litros**
300	$\rightarrow$	25
120	$\rightarrow$	x

Assim

$$300x = 120 \cdot 25 \quad \textit{implica que} \quad x = \frac{3000}{300} = 10 \textit{ litros}$$

Exemplo 3.5 *Márcio contratou um novo pacote de canais para sua TV a cabo. Seu provedor fez uma proposta de aumentar de 100 para 175 canais, aumentando, proporcionalmente, o valor da assinatura. Márcio pagava R\$ 70,00 por mês e aceitou a proposta do provedor. Quanto, em reais, ele passou a pagar?*

a) 52,50 b) 75,00 c) 122,50 d) 145,00 e) 250,00

Resolução 45 *Montando a tabela e comparando as grandezas*

Canais		Valor
100	$\to$	70
175	$\to$	x

Multiplicando cruzado os dados da tabela, obtemos

$$100x = 175 \cdot 70 \quad \textit{implica que} \quad x = \frac{12250}{100} = 122,50 \textit{ reais}$$

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** se o aumento de uma implica a redução proporcional da outra grandeza.

Exemplo 3.6 *um automóvel move-se a 40 km/h e demora cerca de 5 horas para chegar ao seu destino. Se esse automóvel estivesse a 80 km/h, quantas horas levaria para chegar ao mesmo destino?*

Resolução 46 *Não podemos esperar que aumentando a velocidade em que se percorre um trajeto, aumente também o tempo em que se percorre o trajeto. Assim, as grandezas* **velocidade em m/h** *e* **tempo em horas** *são inversamente proporcionais. Porém, se considerarmos o inverso do tempo ou o inverso da velocidade, obtemos grandezas que são diretamente proporcionais e podemos resolver nos moldes do exemplo anterior. Isso é equivalente a, montar um tabela comparando as grandezas e multiplicar horizontalmente ao invés de multiplicar cruzado.*

Velocidade		Tempo
40	$\to$	5
80	$\to$	x

Assim

$$80x = 40 \cdot 5 \quad \textit{implica que} \quad x = \frac{200}{80} = 2,5 \textit{ horas}$$

3.3.2 Problemas Propostos

1. Em um jantar, Ana acendeu uma vela decorativa de 10 cm de altura na mesa e observou que, passados 36 minutos, a medida da altura dessa vela era 4 cm. Considerando que a queima dessa vela tem o mesmo ritmo do início até o final, o tempo total, em minutos, que essa vela permanecerá acesa sem nenhuma intervenção será de

   a) 60 b) 90 c) 134 d) 144 e) 360

2. Uma lanchonete vende sucos em copos com capacidade para 500 mL pelo preço de R$ 5,00. Atendendo aos pedidos de clientes, essa lanchonete também passará a vender seus sucos em copos que comportam 200 mL a mais do que o modelo atual, e o preço desse novo copo de suco será proporcional ao preço do suco vendido no copo de 500 mL. De acordo com essas informações, por qual valor, em reais, essa lanchonete deve vender esse novo copo de suco?
a) 2,00 b) 3,57 c) 5,00 d) 6,35 e) 7,00

3. Uma torneira despejando 4 litros de água por minuto, leva 15 horas para encher um reservatório. Se a torneira despejasse 6 litros de água por minuto, gastaria o seguinte número de horas para encher o mesmo reservatório:
a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

4. Um produtor rural tem 40 bois e ração suficiente para tratá-los por um período de 50 dias. Se o produtor vender 15 bois, com essa mesma quantidade de ração dava para tratar durante um período, em dias, de
a) 30 b) 31 c) 80 d) 120 e) 140

5. A Organização Mundial de Saúde (OMS) recomenda que uma pessoa consuma, no máximo, 2,4 gramas de sódio por dia, o equivalente a 100 g de azeitonas. Seguindo essa recomendação, e considerando que a azeitona será a única fonte de sódio daquele dia, 1 kg de azeitonas será suficiente para o consumo de, no mínimo, quantas pessoas?
a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 34

6. Um carro, viajando a uma velocidade média de 80 $km \setminus h$, faz um determinado percurso em 6 horas. Na hipótese de esse carro fazer a viagem com uma velocidade média de 100 $km \setminus h$, o tempo de percurso seria de
a) 7 horas e 30 minutos
b) 5 horas e 30 minutos
c) 4 horas e 48 minutos
d) 3 horas e 50 minutos
e) 3 horas e 40 minutos

7. Com velocidade média de 600 km/h, um avião faz um percurso em 1h 30 min. Se esse mesmo percurso foi feito em 2 h, qual foi a velocidade média,em km/h, desse avião?
a) 800 b) 688 c) 450 d) 400 e) 300

8. Um edifício de 20 m de altura foi representado por uma maquete de 60 cm de altura. Sabendo que todas as janelas dos apartamentos do edifício têm 1,5 metros de largura, qual é a medida da largura das janelas na maquete desse edifício?

a) 0,5 cm
b) 4,5 cm
c) 6,0 cm
d) 800 cm
e) 1 800 cm

9. A proveta é um instrumento usado em laboratórios para medir e transferir volumes de líquidos. O produto químico colocado na proveta atinge uma altura, em cm, de acordo com o número de gotas. Veja essa correspondência no quadro abaixo.

Proveta

Gotas	Altura (cm)
7	2
14	4
21	6
28	8

Disponível : <http://www.mundodoquimico.hpg.ig.com.br/vidrarias.htm>

Qual será a altura marcada, em cm, na proveta quando forem colocadas 91 gotas de um produto químico?

a) 10 b) 13 c) 21 d) 26 e) 31

3.3.3 Regra de Três Composta

Regra de três composta é um processo matemático utilizado na resolução de questões que envolvem a proporcionalidade direta ou inversa com mais de duas grandezas.

Evidente que em resolução de problemas para regra de três compostas devemos verificar quais são as grandezas envolvidas e qualificar a relação entre elas em: inversas ou diretas no sentido proporcional. Multiplicamos as proporções das que são diretamente proporcional e igualamos a proporção que envolve a grandeza a ser calculada. De fato, se uma for inversamente proporcional devemos inverter a proporção para que a mesma fique diretamente proporcional. Esse processo pode ser embaraçoso quando o problema possui muitas grandezas envolvidas. Neste sentido, apresentaremos um método prático para a resolução que trabalha inteiramente a interpretação, algo inerente desses problemas. Todos problemas de regra de três composta podemos separar as grandezas que fazem parte de um **processo** para obter um resultado denominado **produto**. Os termos processo e produto devem ser interpretados do ponto de vista "empreendedora". O produto nem sempre estará ligada a variável a ser calculada. As vezes, o que desejamos obter é uma parte do processo. Vamos discutir esse método por meio dos exemplos.

Exemplo 3.7 *Dez funcionários de uma repartição trabalham 8 horas por dia, durante 27 dias, para atender certo número de pessoas. Se um funcionário doente foi afastado por tempo indeterminado e outro se aposentou, o total de dias que os funcionários restantes levarão para atender o mesmo número de pessoas, trabalhando uma hora a mais por dia, no mesmo ritmo de trabalho, será*

a) 28 b) 29 c) 30 d) 31 e) 33

Resolução 47 *Dentro do contexto do problema, o interesse da repartição é de atender pessoas, este é então o produto. Para obter esse produto, precisamos do processo que serão os funcionários, as horas trabalhadas e os dias trabalhados. Assim, as variáveis do processo são:* **Funcionários (F), Horas trabalhadas (HT), Dias (D)**. *O produto, será sempre uma única variável, e neste problema, temos a variável* **números de pessoas atendidas (PA)**. *Vamos colocar os dados em colunas separando as variáveis do processo da variável do produto.*

Processo			**Produto**
(F)	(HT)	(D)	(PA)
10	8	27	x
8	9	y	x

Nesta tabela, y determina a variável a ser calculada. O procedimento será multiplicar os valores da primeira linha do processo com o segundo elemento do produto e igualar como o produto da segunda linha do processo com o primeiro termo do produto.

$$\begin{array}{ccccccc} & \textbf{Processo} & & | & \textbf{Produto} & & \\ (F) & (HT) & & (D) & | & (PA) & \\ 10 & \overset{\times}{\rightarrow} & 8 & \overset{\times}{\rightarrow} & 27 & \searrow & x \\ 8 & \overset{\times}{\rightarrow} & 9 & \overset{\times}{\rightarrow} & y & \nearrow & x \end{array}$$

Isto nos fornece

$$10 \times 8 \times 27 \times x = 8 \times 9 \times y \times x \ \ \textit{implica que} \ \ 270 = 9y \ \textit{logo}, \ \ y = 30 \ \textit{dias}$$

Exemplo 3.8 *Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para $900\ m^3$. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de $500m^3$, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver* *cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.*

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2 *b) 4* *c) 5* *d) 8* *e) 9*

Resolução 48 *A discussão da resolução desse problema será mais direta: Interpretamos como produto nesse problema esvaziar o reservatório. Relacionado a essa variável, temos a capacidade do reservatório. Para esvaziar o reservatório dependemos de ralos e horas para o processo. Assim, a montagem fica na forma*

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & \textbf{Processo} & & & & & \textbf{Produto} & \\
(Ralos) & & (Horas) & & & (Capacidade) & & \\
6 & \overset{\times}{\rightarrow} & 6 & \overset{\times}{\rightarrow} & & \searrow & & 900 \\
x & \overset{\times}{\rightarrow} & 4 & \overset{\times}{\rightarrow} & & \nearrow & & 500
\end{array}
$$

Isto nos fornece

$$6 \times 6 \times 500 = x \times 4 \times 900 \ \ \textit{implica que} \ \ 180 = 36x \ \textit{logo}, \ \ x = 5 \ \textit{ralos}$$

3.3.4 Problemas Propostos

1. Seis máquinas fabricam, em 48 dias, 2 000 metros de um tecido. Em quantos dias oito máquinas, com a mesma capacidade de produção, vão fabricar 3 000 metros do mesmo tecido?

   a) 16 b) 24 c) 36 d) 54 e) 64

2. Márcio contratou 5 operários para construir sua casa. Esses operários, trabalhando 8 horas por dia, levarão 150 dias para terminar a construção. Mantendo o mesmo ritmo de trabalho, 8 operários, trabalhando 10 horas por dia, terminam a mesma obra em quantos dias?

   a) 75 b) 300 c) 192 d) 100 e) 125

3. Na perfuração de um poço de 160m de profundidade, 40 operários levaram 21 dias. Quantos dias 30 operários levariam na perfuração de 200m deste mesmo poço?

   a) 25 b) 30 c) 12 d) 13 e) 35

4. Todo dia, em uma empresa, chegam 300 fichas que devem ser digitadas no computador. Atualmente 5 pessoas fazem esse serviço em 3h. Se forem colocadas mais 10 pessoas, o tempo para digitar essas 300 fichas será de:

   a) 1 h b) 2 h c) 3 h d) 6 h e) 9 h

5. Um grupo de professores, trabalhando 8 horas por dia, conseguiu elaborar um banco de questões de Matemática em 40 dias. Trabalhando 5 horas por dia, quantos dias esse mesmo grupo de professores demorará para elaborar o mesmo banco de questões?

   a) 25 b) 40 c) 64 d) 120 e) 200

6. Uma nutricionista recomendou à Dona Vera que comprasse 6 kg de verduras para alimentar de forma saudável as 6 pessoas de sua família durante 7 dias. Dona Vera passou 14 dias na casa de praia e nessa casa havia um total de 8 pessoas. Para alimentar essas 8 pessoas Dona Vera comprou a quantidade de verdura necessária para alimentá-los, durante os 14 dias, na mesma proporção recomendada pela nutricionista. Qual foi a quantidade, em kg, de verdura que Dona Vera comprou?

   a) 8 b) 9 c) 12 d) 16 e) 22

3.4 Descritor D_{16} - Teoria e Problemas

Discutiremos no descritor D_{16} problemas que envolvam porcentagem.

3.4.1 Porcentagem

Iniciaremos a nossa discussão relembrando o que vem a ser uma porcentagem. Representada pelo símbolo %, a porcentagem é a divisão de um número qualquer por 100. Por exemplo, a expressão 10 %, que se lê: **dez por cento**, significa que 10 partes de um todo que foi dividida em 100 partes. três formas:

- **Percentual:** Nessa forma fazemos uso do símbolo % para indicar a quantidade do todo que está sendo considerada. Para esses casos, se p é um número real não negativo
$$p\% = \frac{p}{100}$$
Por exemplo:
$$2\% = \frac{2}{100}, \quad 4,98\% = \frac{4,98}{100} \quad e \quad 75\% = \frac{75}{100}$$

- **Fracionária:** Nessa forma colocamos a fração $\frac{p}{100}$ na forma irredutível. Relembremos que uma fração $\frac{p}{q}$ está na forma irredutível quando p e q são primos entre si, isto é, p e q não podem ser divididos simultaneamente por um número natural maior do que 1. É usual de chamar a fração $\frac{p}{q}$ de forma simplificada. Por exemplo:
$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}$$

Para o exemplo acima, 25 é o maior natural que divide simultaneamente 25 e 100. A este valor damos o nome de **máximo divisor comum** de 25 e 100.

- **Decimal:** Nessa forma transformamos a fração irredutível $\frac{p}{q}$ na forma decimal. Para isso, realizamos a divisão $p \div q$. O resultado dessa divisão é a forma decimal da porcentagem associada a $\frac{p}{q}$. Por exemplo:

$$2\% = \frac{2}{100} = \mathbf{0,02}, \quad 4,98\% = \frac{4,98}{100} = \mathbf{0,0498} \quad e \quad 75\% = \frac{75}{100} = \mathbf{0,75}$$

A porcentagem é muito utilizada no dia a dia. Saber como calcular descontos e aumentos sobre valores de bens ou serviços é muito útil na vida cotidiana. Diversas situações envolvem essas noções, como o aumento de preços em supermercados, o valor incorporado em uma conta do bar referente à gorjeta dada aos garçons (que não é obrigatória, mas que faz parte de nossa cultura e que usualmente é cobrado), descontos dados em lojas em época de liquidação ou quando o valor de um produto é quitado à vista. Esses aumentos e descontos são anotados em forma de porcentagem e os definimos a seguir:

Se um dado valor V_0 sofre um aumento de $p\%$, então o novo valor V_A é dado por

$$V_A = V_0 + \frac{p}{100}V_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) V_0$$

A quantidade

$$1 + \frac{p}{100}$$

é chamada de fator de atualização

De modo análogo podemos definir o desconto

Se um dado valor V_0 sofre um desconto de $p\%$, então o novo valor V_A é dado por

$$V_A = V_0 - \frac{p}{100}V_0 = \left(1 - \frac{p}{100}\right) V_0$$

A quantidade

$$1 - \frac{p}{100}$$

também é chamada de fator de atualização.

Exemplo 3.9 *Uma loja vende um produto à vista com 8% de desconto. Se o valor pago à vista pelo produto foi R\$ 41,40, qual é o preço desse produto sem desconto?*
a) R\$ 3,60 b) R\$ 26,00 c) R\$ 41,40 d) R\$ 45,00 e) R\$ 48,00

Resolução 49 *Estamos interessados no valor inicial V_0 do produto. A porcentagem de desconto é de $8\% = 0,08$ (mais usual trabalhar com a forma decimal na resolução).*

O valor atualizado V_A (já com desconto) é de R\$ 41,40. Assim

$$41,40 = (1 - 0,08)V_0 \quad \textit{implica que} \quad V_0 = \frac{41,40}{0,92} = 45$$

Portanto, antes do aumento o produto custava R\$ 45,00.

Esse problema também pode ser resolvido usando regra de três simples.

Exemplo 3.10 *O preço do aluguel de uma casa passou de R\$ 430,00 para R\$ 559,00. Qual foi a porcentagem de aumento no preço aluguel?*

a) 5% *b) 10%* *c) 15%* *d) 25%* *e) 30%*

Resolução 50 *Aqui temos o valor $V_0 = 430$ e $V_A = 559$. Aplicando na forma do desconto, obtemos*

$$559 = (1 + p\%)430 \quad \textit{implica que} \quad 1 + p\% = \frac{559}{430} = 1,3 \quad \textit{logo,} \quad p\% = 0,3 = 30\%$$

Os problemas de porcentagem não estão somente ligados a problemas financeiros. A seguir trazemos um problema de outra natureza ao qual resolvemos usando regra de três simples.

Exemplo 3.11 *Uma pesquisa sobre o perfil dos que bebem café mostrou que, num grupo de 1 000 pessoas, 70% bebem café e, dentre os que bebem café, 44% são mulheres. Qual a quantidade de homens que bebem café no grupo de 1 000 pessoas?*

a) 700 *b) 660* *c) 392* *d) 308* *e) 260*

Resolução 51 *Das 1000 pessoas, 70% bebem café isso indica que*

$$70\% \quad \textit{de} \quad 1000 = \underbrace{\frac{70}{100} \times 1000}_{\textit{simplificando}} = 70 \times 10 = 700 \quad \textit{pessoas bebem café}$$

Dessas 700 pessoas, 44% são mulheres, logo 100%-44%=56% são homens. Assim, montamos a regra de três

Pessoas		*Porcentagem*
700	$\rightarrow$	100%
H	$\rightarrow$	56%

Multiplicando as informações cruzadas e igualando as, obtemos que a quantidade H é dada por

$$\underbrace{100H = 700 \times 56}_{\textit{simplificando os 00}} \quad \textit{obtemos} \quad H = 392 \textit{ homens}$$

3.4.2 Problemas Propostos

1. Uma escola tem 1500 alunos, sendo 900 do sexo masculino e 600 do sexo feminino. Qual a porcentagem de alunos do sexo masculino em relação ao total de alunos da escola?
   a) 5% b) 10% c) 40% d) 55% e) 60%

2. Júlia fez compras no valor de 80 reais. Como ela pagou à vista, o valor dessas compras caiu para 72 reais. Qual foi o percentual de desconto obtido por Júlia?
   a) 7,2% b) 8% c) 10% d) 11,1% e) 15,2%

3. Um carro bicombustível pode ser abastecido tanto com etanol quanto com gasolina. Com o tanque completamente cheio com etanol, um automóvel percorre, em média, uma distância de 600 km. Enchendo o tanque desse automóvel com gasolina, o consumo é menor , sendo possível aumentar essa distância em 25%. Qual distância, em média, é possível percorrer com o tanque desse carro cheio de gasolina?
   a) 450 km b) 600 km c) 625 km d) 650 km e) 750 km

4. A prefeitura de uma cidade adotou a seguinte promoção para incentivar a arrecadação de IPTU (Imposto Predial Territorial Urbano): "pague com 10de desconto até o dia 10 de maio; preço normal de 11 a 31 de maio ou acréscimo de 10% após o dia 1o de junho". Carla recebeu seu carnê antecipadamente com o preço normal de R$ 350,00 e pagou no dia 10 de junho. Quanto Carla pagou de IPTU?
   a) R$ 385,00 b) R$ 360,00 c) R$ 350,00 d) R$ 340,00 e) R$ 315,00

5. Este mês, Paulo atrasou o pagamento do condomínio. Com isso, além do valor mensal, de R$ 400,00, ele ainda pagou 5,5% de juros. Qual o total que Paulo pagou de condomínio? a) R$ 455,00 b) R$ 424,00 c) R$ 422,00 d) R$ 420,00 e) R$ 405,50

6. O preço de uma bolsa passou de R$ 8,00 para R$ 10,00. O aumento percentual no preço dessa bolsa foi de
   a) 2,0% b) 2,5% c) 20% d) 25% e) 80%

7. Um cliente teve um desconto de 25% na compra à vista de um produto que custava R$ 135,00. O cliente pagou pelo produto
   a) 101,25 b) 110,00 c) 121,50 d) 160,00 e) 168,75

8. O Ministério da Saúde começou, em abril de 2011, uma nova campanha para imunizar a população contra a gripe Influenza H1N1. No "Dia D", que marcou o início da campanha, a Secretaria Municipal de Juiz de Fora – MG vacinou 18.000 pessoas, o que corresponde a 20% da meta a ser atingida. Quantas pessoas ainda

precisam ser vacinadas para se atingir a meta da Secretaria?

a) 14 400. b) 18 000. c) 72 000. d) 90 000. e) 100.000.

9. Todo ano os brasileiros precisam acertar as contas com o Leão, ou seja, com o Imposto de Renda (IR). Suponha que, se a faixa salarial anual de um contribuinte está entre R$ 15.085,45 e R$ 30.144,96, então ele deve pagar 15% de IR. Logo, para verificar o valor devido, basta multiplicar a renda total no ano por 0,15. Nessa situação, se uma pessoa teve uma renda anual de R$ 20.000,00, o valor devido a título de IR é de

   a) R$ 120,00. b) R$ 300,00. c) R$ 1.200,00. d) R$ 3.000,00. e) R$ 4.500,00

10. A loja "Sapatolândia" dá 20desconto, sobre o preço de tabela, em todos os produtos que vende. Laura comprou nessa loja um sapato cujo preço de tabela era R$ 88,50. Quanto Laura pagou por esse sapato?

   a) R$ 17,70. b) R$ 68,50. c) R$ 70,80. d) R$ 88,50. e) R$ 106,20

3.5 Descritor D_{17} - Teoria e Problemas

Neste descritor, discutiremos problemas relacionados a equação do segundo grau. Abordaremos aqui a equação do 2º grau, bem como as funções do 2º grau (funções quadráticas). O estudo dessas funções é rico em propriedades e aplicações. É bom enfatizar que as funções quadráticas são funções que admitem máximo ou mínimo global. Isto torna o uso dessas funções em problemas de máximos e mínimos.

3.5.1 Equação Quadrática e Função Quadrática

Uma equação do segundo grau é uma equação em uma variável dada por

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. O fato de receber o nome equação torna um problema de encontrar o valor da variável que satisfaz a igualdade. A este valor, damos o nome de **solução)**. Para este caso (equação do segundo grau), temos duas soluções que são encontradas por meio do seguinte resultado

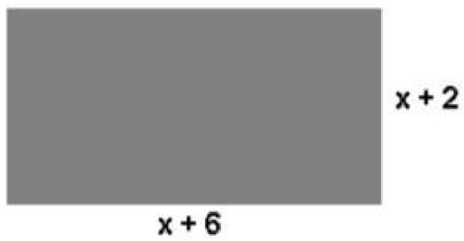
Seja $ax^2 + bx + c = 0$ uma equação do segundo grau, com $a \neq 0$, então as soluções reais, caso existam, são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textbf{com} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

O resultado acima é conhecido como a **fórmula de Bhaskara**. O termo Δ recebe o nome de Discriminante. Podemos associar a existência de soluções da equação por meio do sinal do discriminante.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Não existe solução real	Existe uma única Solução	Existem duas soluções

Exemplo 3.12 *O piso do salão de festas do condomínio onde Marcos mora tem forma retangular com* 140 m^2 *de área. As medidas dos lados do piso estão indicadas na figura a seguir:*



Observando os dados podemos dizer que as dimensões do piso do salão são

a) 2 m e 70 m.

b) 4 m e 35 m.

c) 5 m e 28 m.

d) 7 m e 20 m.

e) 10 m e 14 m.

Resolução 52 *Para determinar as dimensões do piso do salão, devemos encontrar o valor de x. Visto que a área retangular é 140 m^2, e relembrando que área de um retângulo é o produto da base pela altura, temos*

$$(x + 6) \times (x + 2) = 140$$

Agora, devemos usar a distributividade no lado esquerdo da igualdade acima

$$x^2 + 8x + 12 = 140$$

do qual obtemos a equação do segundo grau

$$x^2 + 8x - 128 = 0$$

Agora, vamos aplicar a fórmula de Bhaskara com $a = 1$, $b = 8$ e $c = -128$.

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times (-128) = 64 + 512 = 576$$

Assim,

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{576}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 24}{2} \quad \textit{implica que} \quad x' = \frac{16}{2} = 8 \quad e \quad x'' = \frac{-32}{2} = -16$$

Evidentemente pela natureza do problema, a solução que procuramos é $x = 8$. Desta forma

$$x + 6 = 8 + 6 = 14\ m \quad e \quad x + 2 = 8 + 2 = 10\ m$$

Podemos destacar no problema acima que poderíamos fatorar o valor 140 e observar que $x + 6$ é maior quatro unidades em relação a $x + 2$. Assim, escrevemos 140 como produto de dois números de tal forma que a diferença entre esses dois números é igual a 4. Portanto,

$$(x + 6) \times (x + 2) = 140 = 14 \times 10 \ \text{ implica que } \ x = 6$$

Exemplo 3.13 *A idade de Mariana é representada por um número que somado ao seu quadrado é igual a 12. Qual a idade, em anos, de Mariana?*

a) 2 *b) 3* *c) 4* *d) 5* *e) 6*

Resolução 53 *Chamando de x a idade de Mariana, temos*

$$\underbrace{x + x^2}_{\textit{Colocando } x \textit{ em evidência}} = 12 \quad \textit{implica que} \quad \underbrace{x(1 + x)}_{N^{\underline{o}}s \textit{ consecutivos}} = 12$$

Sendo $x(1 + x)$ o produto de dois números consecutivos, devemos escrever 12 de tal forma, assim

$$x(1 + x) = 3 \times 4 \quad \textit{implica que} \quad x = 3 \textit{ anos}$$

Associado ao estudo das equações do segundo grau temos o estudo das funções do segundo grau ou funções quadráticas.

Uma função quadrática é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

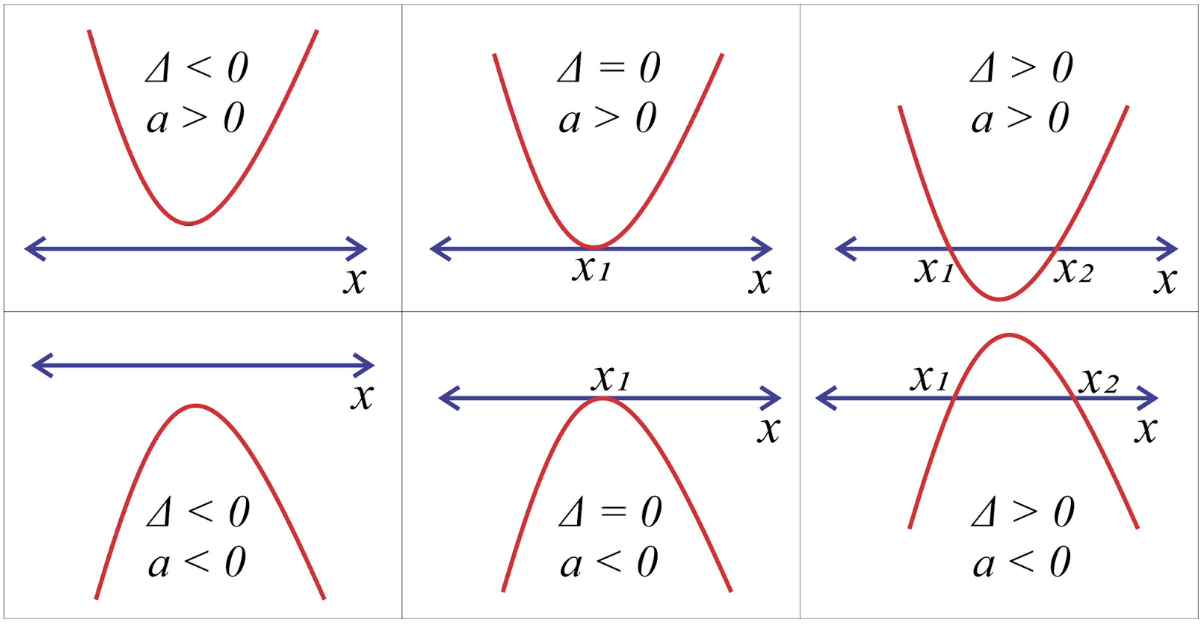
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

A expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ é denominada lei de formação de f. Quando fazemos $f(x) = 0$, obtemos uma equação do segundo grau a ser resolvida. Desta forma, caso exista solução, os valores x' e x'' encontrados por meio da fórmula de Bhaskara satisfazem

$$f(x') = 0 \quad \text{e} \quad f(x'') = 0$$

Esses valores são chamados de **zeros ou raízes da função f**. A representação gráfica de uma função quadrática, isto é, a representação do conjunto de pontos $\{(x, f(x));\ x \in \mathbf{R}\}$ denota uma curva no plano cartesiano denominada **parábola**. Esse gráfico tem a sua geometria dependendo dos sinais dos coeficientes a, b e c da função f. As raízes, caso existam são representadas por pontos onde a curva da parábola corta o eixo das abscissas. A figura a seguir, mostra a posição do gráfico de uma função quadrática em relação ao eixo x.

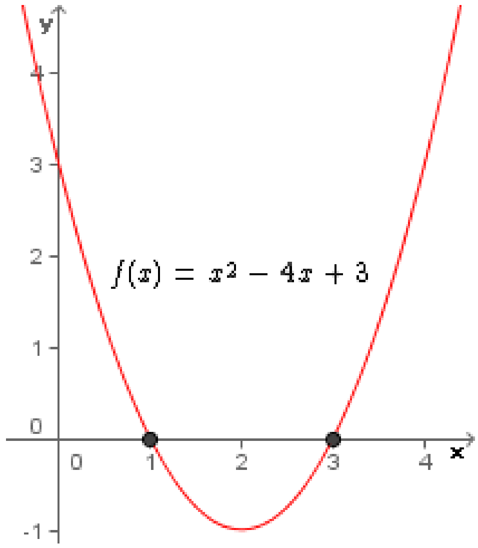


Repare que quando $\Delta < 0$ a parábola nã0 intercepta o eixo x, isso indica que a função não possui raízes reais. A existência de raízes nesse caso é garantida em um conjunto mais completo chamado de números complexos.

Exemplo 3.14 *O gráfico da função quadrática*

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

está representado abaixo.



Dado um número x_0, o valor $f(x_0)$ é o **valor numérico** de $f(x)$ em $x = x_0$. Assim, os zeros da função quadrática possuem valor numérico nulo.

Exemplo 3.15 *Um corpo lançado do solo verticalmente para cima tem posição em função do tempo dada pela função $f(t) = 40t - 5t^2$, onde a altura $f(t)$ é dada em metros e o tempo t em segundos. De acordo com essas informações após 4 segundos qual é a altura, em metros, atingida pelo corpo?*
a) 30 *b) 40* *c) 50* *d) 80* *e) 140*

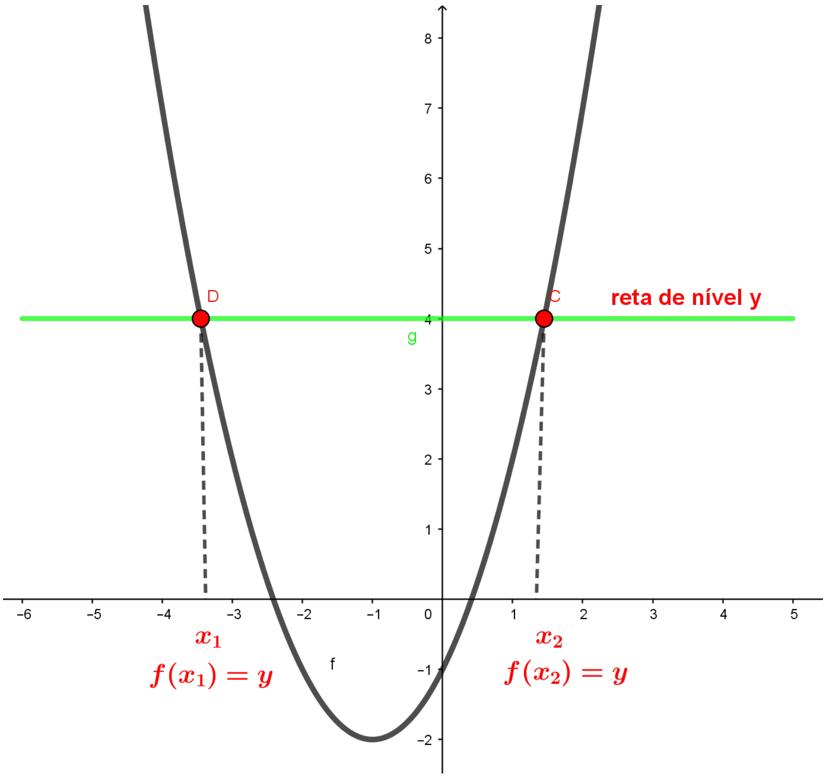
Resolução 54 *Estamos interessados na altura do corpo após 4 segundos. Isto é, devemos calcular o valor numérico da função f para $t = 4$. Assim,*

$$f(4) = 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 160 - 5 \cdot 16 = 160 - 80 = 80 \quad \textit{metros}$$

Se um dado problema é encontrar o valor de x para o qual o valor numérico é y, então dizemos que estamos interessados em calcular a pré imagem de y. Isto é equivalente a resolver a equação

$$f(x) = y$$

onde x é a variável a ser calculada e o valor de y é conhecido. Geometricamente, essas soluções indicam as abscissas dos pontos onde a reta horizontal de nível y corta o gráfico na função f. Tal reta recebe o nome de reta de nível.



Exemplo 3.16 *O proprietário de uma fazenda adquiriu alguns pássaros, que se alimentam de lagartas, para acabar com a praga que infestou sua plantação. A função* $L(t) = 4t^2 - 80t + 400$ *representa o número de lagartas* $L(t)$*, em milhares, após* t *dias da presença dos pássaros na plantação. Qual é o tempo gasto, em dias, para acabar com a população de lagartas?*

a) 10 *b) 20* *c) 30* *d) 40* *e) 50*

Resolução 55 *Estamos interessados em determinar o valor* t *para o qual* $L(t) = 0$*. Isto é, os valores de* t *são zeros da função* L*. Desta forma, resolveremos a equação*

$$\underbrace{4t^2 - 80t + 400 = 0}_{\text{simplificando por 4}} \quad \textit{implica que} \quad t^2 - 20t + 100 = 0$$

Usaremos a fórmula de Bhaskara com $a = 1,\ b = -20$ *e* $c = 100$*. Assim*

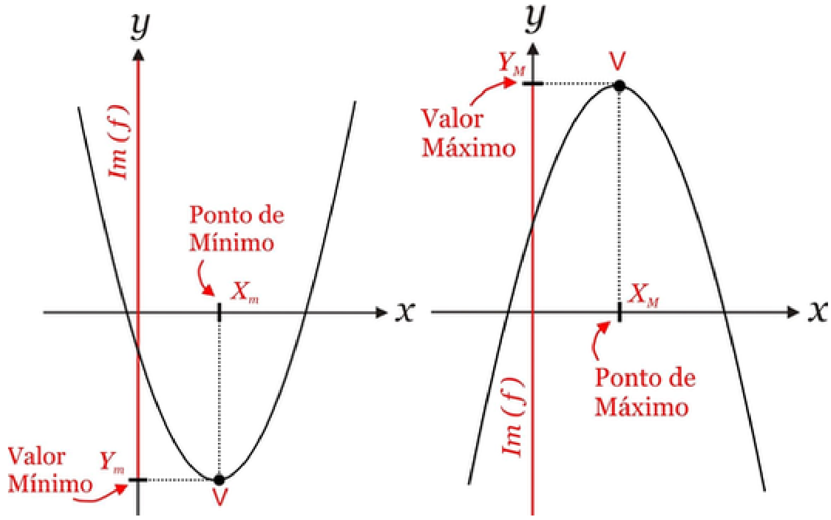
$$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100 = 400 - 400 = 0 \quad e \quad t = \frac{-(-20) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10 \ \textit{dias}$$

Note que quando $\Delta = 0$*, temos uma única solução.*

Umas das principais características das funções quadráticas são a existência de máximo e mínimos globais.

Dizemos que x_V é um valor máximo global (respectivamente mínimo global) para uma função f, se $f(x_V) > f(x)$ (respectivamente $f(x_V) < f(x)$) para todo x. Neste caso, $f(x_V)$ é um valor máximo (respectivamente um valor mínimo).

Os valores máximos são valores de nível máximo, enquanto os valores mínimos são valores de nível mínimo. A existência desses valores depende do sinal do coeficiente a para as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a > 0$, temos um valor mínimo. Se $a < 0$, temos um valor máximo.



Os valores de máximos ou mínimos são dados pelos cálculos do **vértice da parábola** $V(x_V, y_V)$ onde x_V é o $x_{\text{vértice}}$ e y_V é o $y_{\text{vértice}}$.

As coordenadas do vértice de uma parábola $V(x_v, y_V)$ são dadas por

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad e \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a} \quad \textbf{onde} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Em particular, $y_V = f(x_V)$.

Exemplo 3.17 *O lucro $L(x)$ de uma empresa em função do número de peças fabricadas (x) é dado pela função . $L(x) = 200x - x^2$. Qual é o número de peças que essa empresa deve fabricar para obter o lucro máximo?*

a) 25 b) 100 c) 200 d) 1000 e) 2000

Resolução 56 *O lucro máximo é obtido quado $x = x_V$. Sendo $a = -1$ e $b = 200$, temos*

$$x_V = -\frac{200}{2 \cdot (-1)} = 100 \quad \textit{peças}$$

Exemplo 3.18 *O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela função $h(x) = -40x^2 + 200x$, com h em metros. A altura máxima atingida, em metros, pelo projétil é*

a) 6,25 b) 40 c) 200 d) 250 e) 2000

Resolução 57 *Devemos calcular a altura máxima. A variável que indica a altura é h que cumpre o papel da ordenada dos pontos do gráfico. Isto é, h denota a variável y. Assim, devemos calcular o valor do y_V. Assim,*

$$\Delta = 200^2 - 4 \cdot (-40) \cdot 0 = 20000 \quad \textit{implica que} \quad y_v = -\frac{20000}{4 \cdot (-40)} = 250 \ \textit{metros}$$

3.5.2 Problemas Propostos

1. A medida da área de um quadrilátero pode ser calculada através da função $M(x) = -x^2 + 40x$, em que x representa a medida de um dos lados desse quadrilátero e M(x) representa a área. Qual será a medida máxima da área desse quadrilátero?

   a) 820 b) 600 c) 400 d) 250 e) 200

2. Para garantir o sigilo da senha de seu cofre, Jairo, que adora Matemática, escreveu essa senha na sua agenda, usando o seguinte código: "O quadrado de um número menos 6 000 é igual a 70 vezes esse número". A raiz positiva da equação que traduz esse código dá a senha do cofre. Qual é a senha do cofre de Jairo?

   a) 120 b) 170 c) 1100 d) 2300 e) 2305

3. Em uma formatura, João reparou que os 300 formandos estavam enfileirados em n linhas e (n + 5) colunas. Em quantas linhas os formandos estavam enfileirados?

   a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

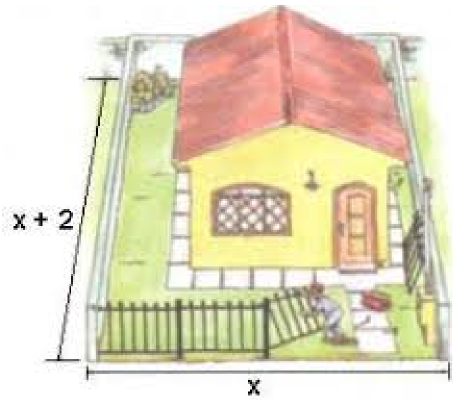
4. Uma câmara frigorífica usada para armazenar certos tipos de alimentos precisa ter sua temperatura variando entre graus negativos e positivos para que o alimento não perca suas propriedades. A temperatura é dada por $h(t) = t^2 - 4t + 3$, em que h(t) representa a temperatura na câmara, medida em graus Celsius (ºC), ao longo do tempo que está representado por t e é medido em horas. A temperatura depois de 5 horas que a câmara foi ligada é:

   a) 5ºC b) -7ºC c) 8ºC d) -5ºC e) -8ºC

5. O proprietário de uma fazenda adquiriu alguns pássaros, que se alimentam de lagartas, para acabar com a praga que infestou sua plantação. A equação $L(t) = 4t^2 - 80t + 400$ representa o número de lagartas L(t), em milhares, após t dias da presença dos pássaros na plantação. Qual é o tempo, em dias, gasto para acabar com a população de lagartas?

   a) 10 b) 40 c) 200 d) 400 e) 306

6. João comprou uma casa que está construída em um terreno retangular de 255 m^2 de área. Ele deseja colocar uma grade em toda a frente do terreno.



A quantidade de metros de grade colocada na frente da casa é:

a) 17 b) 20 c) 16 d) 14 e) 15

7. Joaquim comprou um terreno de formato quadrado de 289 m^2 em um condomínio fechado. O regimento do condomínio prevê que cada proprietário é responsável pelo revestimento da calçada de seu terreno. O comprimento, em metros, que Joaquim deverá construir, se o terreno não é de esquina, é:

   a) 17 b) 20 c) 16 d) 14 e) 15

8. Uma caixa tem 4 cm de comprimento, 5 cm de largura e 6 cm de altura. Aumentando X centímetro no comprimento e na largura e diminuindo 2 cm da altura, obtém-se uma caixa de mesmo volume. Qual o valor de X?

   a) 1 b) 9 c) 120 d) 150 e) 180

9. Uma bola é atirada para cima, do alto de uma torre. A distância d, em metros, da bola até o solo, é dada por $d(t) = 80 + 30t - 5t^2$, em que t representa o tempo, em segundos, transcorrido após o lançamento da bola. Para que valor de t, em segundos, a distância da bola até o solo é igual a 45 metros?

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 7 e) 8

10. Um corpo lançado do solo verticalmente para cima tem posição em função do tempo dada pela função $f(t) = 40t - 5t^2$, onde a altura $f(t)$ é dada em metros e o tempo t em segundos. De acordo com essas informações após 4 segundos qual é a altura, em metros, atingida pelo corpo?

    a) 30 b) 40 c) 60 d) 80 e) 140

3.6 Descritor D_{18} - Teoria e Problemas

No descritor D_{18} vamos associar a lei de formação de uma função a partir dos dados tabelados.

3.6.1 A lei de formação de funções

É normal construímos gráficos pode meio de tabelas. A lei de formação de uma função é uma regra (relação) que de ser satisfeita pelas duas variáveis que é fornecida pela tabela. As leis de formação caracterizam as funções. Por exemplo, no descritor D_{17} discutimos as funções quadráticas que possuem a lei de formação

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Veremos neste descritor a presença de uma lei de formação simples, já explorado nos descritores D_7 e D_8, que são as funções dadas pela forma

$$f(x) = ax + b$$

onde a é o coeficiente angular e b coeficiente linear. Relembremos que a pode ser obtido por meio da fórmula

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \text{com} \quad \Delta x = x_B - x_A \text{ e } \Delta y = y_B - y_A$$

com $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são pontos tabelados.

Exemplo 3.19 *A tabela abaixo dá o preço de bolinhos de bacalhau em gramas, vendidos na fábrica.*

Peso (em gramas)	Preço (em reais)
100	3,60
200	7,20
250	9,00
300	10,80
400	14,40
500	18,00

A expressão que representa a quantia (P) a ser paga em reais, em função do peso (x) de bolinhos comprados em quilogramas, é:
a)$P = 0,36x$ *b)* $P = 3,6x$ *c)* $P = 36x$ *d)* $P = 360x$ *e)* $P = 18x$

Resolução 58 *A discussão da resolução das questões relacionadas a esse descritor pode ser por verificação da função que cumpre os dados da tabela, isto é, substituindo o peso x obtemos o preço tabelado correspondente. Note que a variação de 100 gramas no peso leva uma variação de R\$ 3,60 no preço. Isso indica que 100 gramas possui valor R\$ 3,60. Logo sendo* 1 *kg* $= 1000$ *g, temos que o preço pago por kg é R\$ 36,00. Portanto, a lei de formação é* $P(x) = 36x$.

Os problemas que apresentamos segue a mesma ideia e portanto, não daremos mais exemplos. Deixamos a cargo do leitor a exploração dos problemas.

3.6.2 Problemas Propostos

1. A tabela abaixo relaciona o volume de água de um reservatório com o tempo necessário para atingir esse volume.

Tempo (minutos)	5	10	15	20
Volume (litros)	170	340	510	680

A expressão algébrica que relaciona o volume V, em litros, com o tempo t, em minutos, é
a) $V = 34t + 170$
b) $V = 5t + 170$
c) $V = 34 + t$
d) $V = 170t$
e) $V = 34t$

2. Paulo é corretor de imóveis, recebendo mensalmente um salário fixo de R$ 1500,00 e mais uma comissão de 2,5% de cada imóvel vendido por ele. Considerando-se R, a renda mensal de Paulo e n, o número de imóveis vendidos mensalmente, a expressão algébrica que representa o rendimento mensal de seu trabalho será:
a) $R = 2,5n$
b) $R = 1500 + 2,5n$
c) $R = 2,5 + 1500n$
d) $R = 1500 + 0,25n$
e) $R = 1500 + 0,025n$

3. A tabela abaixo mostra o valor cobrado por uma copiadora, de acordo com o número de cópias.

Número de cópias	1	5	10	20	30	---	p
Valor em reais	0,10	0,50	1,00	2,00	3,00	---	V

Qual é a fórmula que relaciona o número de cópias (p) com o valor a ser pago (V)?
a) $V = 0,10p$
b) $V = 1 + 5p$
c) $V = 0,10 + 0,5p$
d) $V = 5p$
e) $V = 3 + 0,4p$

4. A tabela abaixo relaciona a quantia y, em reais, a ser paga ao adquirir um número x de unidades de um certo produto, em uma loja de materiais escolares.

Unidades adquiridas (x)	3	6	9	12
Quantia paga (y)	R$ 9,30	R$ 18,60	R$ 27,90	R$ 37,20

Qual é a expressão algébrica que relaciona o número de unidades com a quantia a ser paga?
a) $y = 3x + 9,30$
b) $y = 3x + 3,10$
c) $y = 3,10 + x$
c) $y = 3,10x$
e) $y = 9,30x$

5. Para alugar um carro, uma locadora cobra uma taxa básica fixa acrescida de uma taxa que varia de acordo com o número de quilômetros rodados. A tabela abaixo mostra o custo (C) do aluguel, em reais, em função do número de quilômetros rodados (q).

Quilômetros rodados (q)	Custo (C)
10	55
20	60
30	65
40	70

Entre as equações abaixo, a que melhor representa esse custo é:
a) $C = 5q + 5$
b) $C = 4q + 15$
c) $C = q + 45$
d) $C = q/2 + 50$
e) $C = q/10 + 55$

6. O quadro abaixo mostra o valor v, em reais, cobrado por uma operadora de telefonia, em função do número n de minutos falados.

Minuto falado	Valor a pagar
0	10,00
1	10,15
2	10,30
3	10,45
...	...
100	25,00

A expressão que permite determinar o valor v, em reais, a pagar por um número n qualquer de minutos falados é

a) $v = 10n + 0,15$

b) $v = 0,15n + 10$

c) $v = 0,15(n + 10)$

d) $v = 10(n + 0,15)$

e) $v = 0,15n$

3.7 Descritor D_{19} - Teoria e Problemas

Neste descritor discutiremos a resolução de problemas que envolvam equações do primeiro grau. Problemas que envolvem equação do primeiro grau ou envolvem a função do primeiro grau são problemas que modelam fenômenos lineares. Iremos abordar equações lineares e funções afim (funções do primeiro grau).

3.7.1 Equações do Primeiro Grau e Funções do Primeiro Grau

Uma equação é chamada de equação do primeiro grau se:

- Cada variável da equação possui grau 0 ou 1;
- Existe pelo menos uma variável de grau 1;
- Não existe produto misto entre variáveis.

Por exemplo: $2x + 3y + z = 5$ é uma equação do primeiro grau nas variáveis x, y e z. Já a equação $2xy + 2z - 9$ não é uma equação do primeiro grau devido a presença do termo misto $2xy$. Focaremos o nosso estudo em equações do primeiro grau em uma variável. Isto é, equações da forma

$$ax + b = 0$$

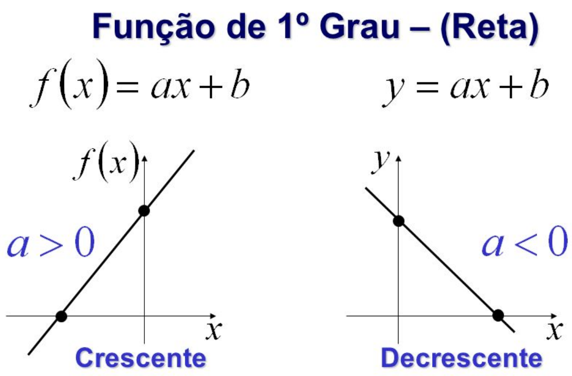
onde $a, b \in \mathbf{R}$ com $a \neq 0$. Tais equações possuem uma única solução que é dada por $x = -b/a$. Tal solução é zero da função

$$f(x) = ax + b$$

que é chamada de **função do primeiro grau** ou **função afim**. Relembremos que a é o coeficiente angular e b coeficiente linear. Além do mais, a pode ser obtido por meio da fórmula

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \text{com} \quad \Delta x = x_B - x_A \text{ e } \Delta y = y_B - y_A$$

com $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são pontos conhecidos. O comportamento gráfico da função afim depende do sina do coeficiente angular a



É importante enfatizar que é comum, devido a situações gráficas, escrever $y = ax + b$ ao invés de $f9x) = ax + b$. Portanto, fica bem explicito que $y = f(x)$.

Exemplo 3.20 *Uma torneira despeja 2,5 litros por minuto enchendo um tanque inicialmente vazio. Considere que y represente o volume, em litros, e x o tempo, em minutos. A função que representa essa situação é*

a) $y = 2,5x - 15$

b) $y = 2x - 15$

c) $y = 2,5x$

d) $y = 2x$

e) $y = x + 2,5$

Resolução 59 *Note que o nosso desejo é de obter a função afim* $y = ax + b$*. Pelo enunciado, temos em 0 minutos, são despejados 0 litros. Assim, quando* $x = 0$*, temos que* $y = 0$*. Desta forma*

$$0 = a \cdot 0 + b \quad \textit{implica que} \quad b = 0$$

Neste momento, a função afim possui a forma $y = ax$. *Visto que em 1 minuto, são despejados 2,5 litros. Temos que se* $x = 1$, $y = 2,5$. *Portanto,* $a = 2,5$ *e obtemos a função afim* $y = 2,5x$.

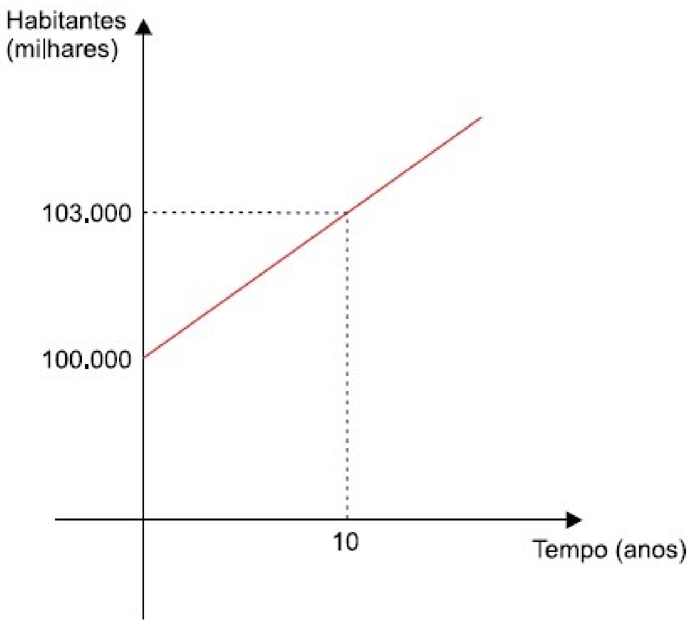
A função que obtemos no exemplo acima possui a forma $y = ax$. Na literatura, tais funções são denominadas lineares. Apesar do nome, qualquer função afim pode ser transladada afim de ser escrita na forma linear.

Exemplo 3.21 *O dono de uma confecção adquiriu uma máquina no valor de R\$ 2 100,00. Esta máquina sofre uma desvalorização de R\$ 400,00 a cada ano de uso. O preço P da máquina, em reais, após a desvalorização, em função do tempo t, em anos, é dado pela expressão* $P = 2100 - 400t$. *De acordo com essa expressão, essa máquina poderá ser vendida como sucata por R\$ 100,00 a partir de quantos anos?*
a) 4,2 b) 5,0 c) 5,5 d) 17,0 e) 21,0

Resolução 60 *Devemos encontrar qual deve ser o valor t para o qual* $P = 100$. *Isto equivale a resolver a equação* $100 = 2100 - 400t$. *Assim,*

$$100 = 2100 - 400t \quad \rightarrow \quad 400t = 2000 \quad \rightarrow \quad x = 5 \ \ anos$$

Exemplo 3.22 *O gráfico a seguir representa uma projeção do número de habitantes de um município em n anos.*



A taxa de crescimento deste município, em habitantes por ano, foi de:
a) 103000 b) 100000 c) 3000 d) 300 e) 10

Resolução 61 *A taxa de crescimento aqui é representado pelo coeficiente angular a da função afim. Para isso, olharemos os dois pontos que podemos coletar do gráfico.*

Temos um ponto sobre o eixo dos habitantes $(0, 100000)$ *e outro ponto* $(10, 103000)$. *Assim, denotando por* $A(0, 100000)$ *e* $B(10, 103000)$, *temos que*

$$\Delta y = 103000 - 100000 = 3000 \quad e \quad \Delta n = 10 - 0 = 10$$

Portanto,

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta n} = \frac{3000}{10} = 300$$

Este valor indica que a cada ano aumenta 300 mil habitantes no município.

3.7.2 Problemas Propostos

1. Um objeto está em movimento com velocidade constante. A posição desse objeto em função do tempo pode ser calculada através da expressão $D = 5+25t$, em que D representa a posição, em metros, e, t, o tempo, em segundos. Para percorrer uma certa distância, o objeto gastou 65 segundos. Qual é a posição, em metros, desse objeto após percorrer essa distância?
   a) 2,4 b) 2,8 c) 1620 d) 1630 e) 1950

2. Para pintar uma parede, um pintor cobra R$ 0,70 por metro quadrado mais uma taxa fixa de R$ 12,00. A função que representa o valor V cobrado por esse pintor em função de x metros quadrados pintados é
   a) $V = 0,7x + 12$
   b) $V = 12x + 0,7$
   c) $V = x + 12$
   d) $V = 0,7x$
   e) $V = 12x$

3. Mateus é técnico em computação e tem uma oficina de prestação de serviços. Para a reparação de computadores com problemas, Mateus obedece à seguinte regra para cobrança dos serviços: $C = 20x + 60$, onde C é o custo (em reais) e x, o número de horas de trabalho no computador avariado. Na semana passada, Mateus recebeu um computador com muitos problemas. Tantos que ele demorou 16 horas para consertá-lo. Mateus recebeu por esse serviço, em reais,
   a) 190 b) 210 c) 280 d) 320 e) 380

4. O custo de produção de uma pequena empresa é composto por um valor fixo de R$ 1 500,00 mais R$ 10,00 por peça fabricada. O número x de peças fabricadas quando o custo é de R$ 3 200,00 é
   a) 470 b) 150 c) 170 d) 320 e) 160

5. Considere duas empresas A e B de táxi. O custo de uma corrida pela empresa A

é composto de uma taxa de R$ 5,00 e R$ 1,00 por quilômetro rodado enquanto o da empresa B é composto de uma taxa de R$ 8,00 e R$ 0,80 por quilômetro rodado. Com base nesta informação tem-se:

a) custo de uma corrida pela empresa A é calculado pela função linear $f(x) = 1 + 5x$.

b) custo de uma corrida pela empresa B é calculado pela função linear $g(x) = 0,80 + 8x$.

c) numa corrida de 10 km o custo pela empresa B é de R$ 15,00.

d) numa corrida de 10 km o custo pela empresa A é de R$ 18,00.

e) uma corrida de 16 km é mais econômica se feita pela companhia B.

6. Existem várias regras para se determinar a dose de um medicamento para criança quando é conhecida a dose de um adulto. É claro que a dose da criança será uma fração da dose do adulto. Uma das regras diz que a dose da criança:

$$\frac{\text{(Peso em kg da criança)} \times \text{(dose do adulto)}}{70}$$

Para um medicamento cuja a dose do adulto é 210 mg, a dose de uma criança em mg, cujo peso é 12 kg é:

a) 3,1 b) 36,0 c) 58,0 d) 140,0 e) 198,0

7. Jorge emprestou R$ 1.200,00 para seu irmão Gabriel no regime de capitalização simples a uma taxa de 2% ao mês. Ao final de 6 meses, Gabriel saldou sua dívida com Jorge. Quanto Gabriel pagou para seu irmão Jorge?

a) R$ 1.344,00

b) R$ 2.400,00

c) R$ 2.640,00

d) R$ 3.600,00

e) R$ 7.200,00

8. A mecanização das colheitas obrigou o trabalhador a ser mais produtivo. Um lavrador recebe, em média, R$ 2,50 por tonelada de cana-de-açúcar e corta oito toneladas por dia. Considere que cada tonelada de cana-de-açúcar permite a produção de 100 litros de álcool combustível, vendido nos postos de abastecimento a R$ 1,20 o litro. Para que um cortador de cana-de- açúcar possa, com o que ganha nessa atividade, comprar o álcool produzido a partir das oito toneladas de cana resultantes de um dia de trabalho, ele teria de trabalhar durante quantos dias

a) 3 b) 18 c) 30 d) 48 e) 60

9. Um funcionário de uma loja recebe salário mensal fixo de R$ 1.000,00, e acréscimo

de mais 5% de comissão do total de suas vendas no mês. Seja X o total de vendas desse funcionário no mês e y o seu salário mensal total. A função que expressa o salário total mensal desse funcionário é:

a) $y = 1005X$

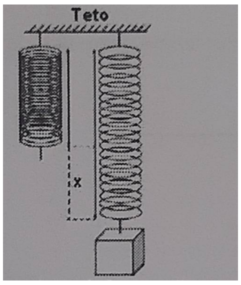
b) $y = 1000 + 0,05X$

c) $y = 1000 + 1,05X$

d) $y = 1000 + 5X$

e) $y = 1000 + 50X$

10. Um bloco preso em uma mola sofre uma deformação x de acordo com a expressão matemática: $10 \cdot m = 150 \cdot x$, em que m representa a massa do bloco, em quilograma, e x é a deformação sofrida pela mola, em metros, conforme ilustração abaixo.



Considerando uma massa de 6 kg, qual é a deformação, aproximada, sofrida pela mola no equilíbrio?

a) 0,94 b) 0,90 c) 0,40 d) 0,25 e) 0,10

3.8 Descritor D_{20} - Teoria e Problemas

Neste descritor vamos abordar crescimento e decrescimento de funções por meio do gráfico.

3.8.1 Análise Gráfica de uma Função

Dado o gráfico de uma função, devemos identificar em qual intervalo a função é crescente, decrescente ou constante. Analiticamente, temos o seguinte resultado:

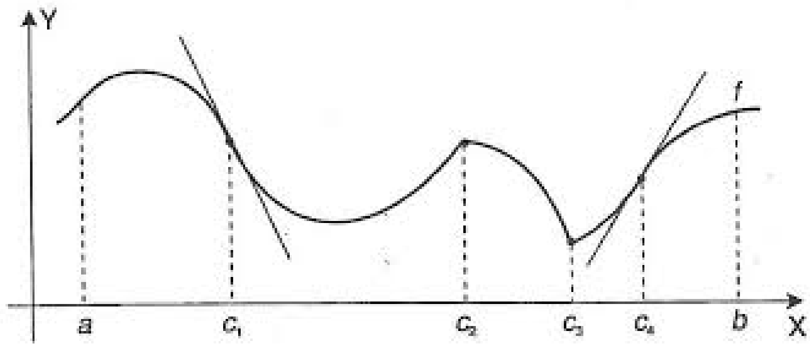
Dada uma função f e um intervalo I ao qual a função é definida. Então

- **f é crescente em I se para quaisquer $x, y \in I$ com $x > y$ tenha-se que $f(x) > f(y)$. Isto é, os valores numéricos $f(x)$ aumentam quando os valores x aumentam.**

- **f é decrescente em I se para quaisquer $x, y \in I$ com $x > y$ tenha-se que $f(x) < f(y)$. Isto é, os valores numéricos $f(x)$ reduzem quando os valores x aumentam.**

- **f é contante em I se existe k tal que para quaisquer $x, y \in I$ com $x > y$ tenha-se que $f(x) = f(y) = k$. Isto é, os valores numéricos $f(x)$ não aumentam e nem reduzem quando os valores x aumentam.**

Essa análise que é apresentada acima indica que as retas que traçam a direção onde a função cresce possui inclinação para a direita (coeficiente angular positivo). As retas que traçam a direção onde a função decresce possui inclinação para a esquerda (coeficiente angular negativo). Já as retas que indicam onde a função é constante são horizontais.

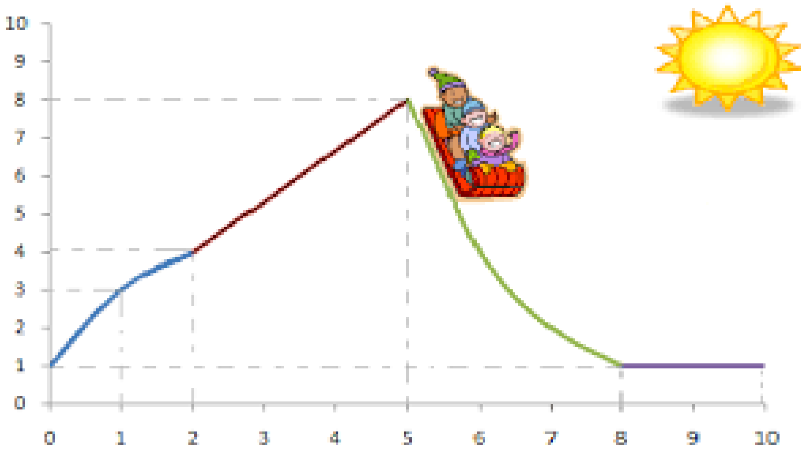


A análise de comportamento gráfico quanto a crescimento, decrescimento ou constância da função não precisa do rigor da parte analítica realizada acima. Podemos imaginar da seguinte forma (que é informal).

- Se ao caminhar sobre o gráfico, no sentido da esquerda para direita, você está subindo, então a função é crescente naquele intervalo.

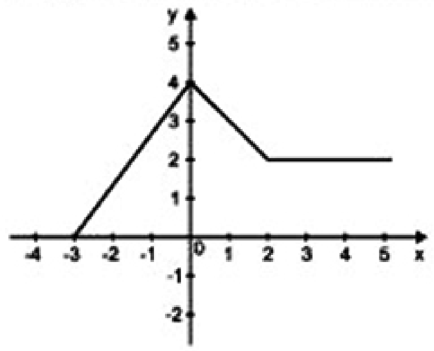
- Se ao caminhar sobre o gráfico, no sentido da esquerda para direita, você está descendo, então a função é decrescente naquele intervalo.

- Se ao caminhar sobre o gráfico, no sentido da esquerda para direita, você não está subindo e não está descendo, então a função é constante naquele intervalo.



No gráfico acima a função é crescente no intervalo $[0, 5]$, decrescente no intervalo $[5, 8]$ e constante no intervalo $[8, 10]$. Você pode se perguntar sobre os valores pontuais 5 que pertence a situações de crescimento e decrescimento. O valor 5 recebe o nome de **ponto de inflexão**. Os pontos de inflexão são os pontos onde a função muda de estado (crescimento para decrescimento ou decrescimento para crescimento).

Exemplo 3.23 *O gráfico abaixo representa uma função definida no intervalo [– 3, 5].*

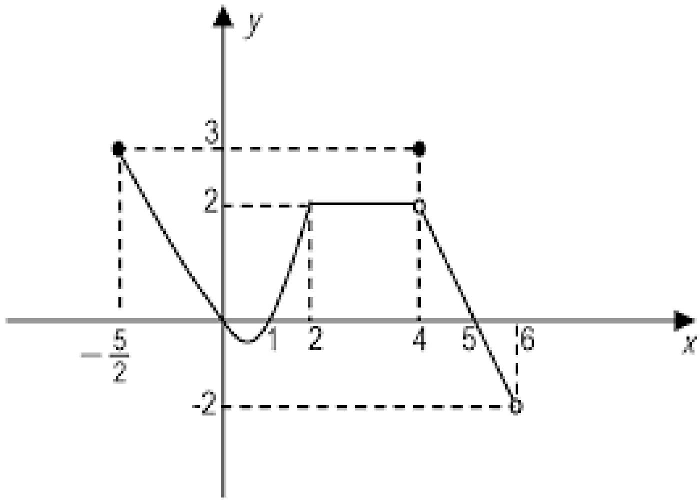


Essa função é decrescente no intervalo.

a) $[-4, 0]$ *b)* $[-2, 0]$ *c)* $[0, 2]$ *d)* $[0, 4]$ *e)* $[2, 4]$

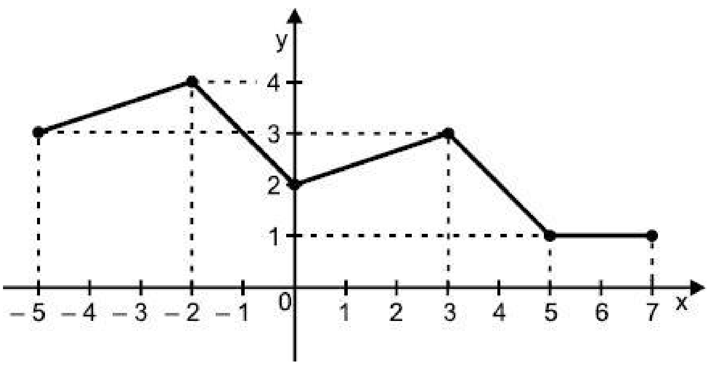
Resolução 62 *Note que caminhando da esquerda para a direita, no intervalo* $[0, 2]$ *estaremos descendo. Logo, a função é decrescente nesse intervalo.*

O estudo gráfico de uma função reserva mais uma discussão. A interpretação geométrica dos zeros de uma função f, isto é, valores r tais que $f(r) = 0$, são os valores onde o gráfico da função corta ou tangencia o eixo x. Por exemplo. a função descrita no gráfico abaixo, possui três zeros no intervalo ao qual a função está representada



3.8.2 Problemas Propostos

1. A função apresentada no gráfico abaixo está definida no intervalo $[-5, 7]$



O intervalo onde a função é crescente é:

a) $[-5, -2]$

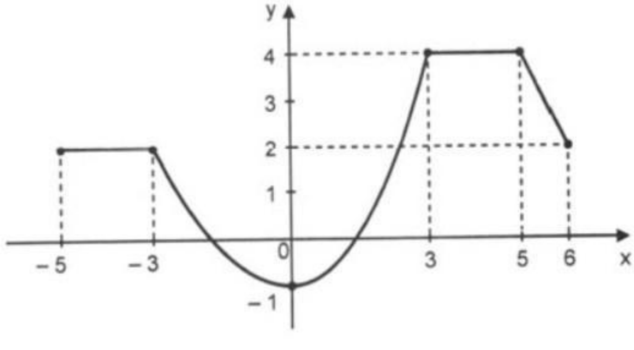
b) $[0, 2] \cup [3, 4]$

c) $[-5, -2] \cup [0, 3]$

d) $[-2, 0] \cup [3, 5]$

e) $[5, 7]$

2. A função apresentada no gráfico abaixo está definida no intervalo $[-5, 6]$



O intervalo, onde a função é constante, é:

a) $[-5, -2]$

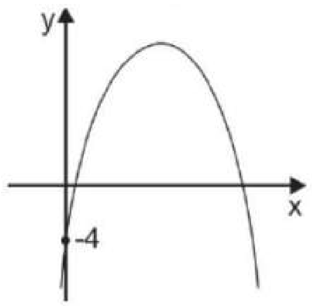
b) $[-3, 3]$

c) $[-5, -3] \cup [5, 6]$

d) $[-5, -3] \cup [3, 5]$

e) $[-5, 5]$

3. O gráfico a seguir é a representação de uma função do $2^{\underline{o}}$ grau.



A função representada pelo gráfico acima tem duas raízes

a) reais negativas

b) reais iguais à zero

c) reais iguais.

d) reais sendo uma positiva e outra negativa.

e) reais positivas distintas.

4. O gráfico abaixo representa uma função g(x) definida de $[-3, 4]$ em $\mathbf{R}$. No gráfico abaixo, está representada uma função polinomial do $1^{\underline{o}}$ grau. As raízes dessa função são:

a) – 2, – 1 e 2.

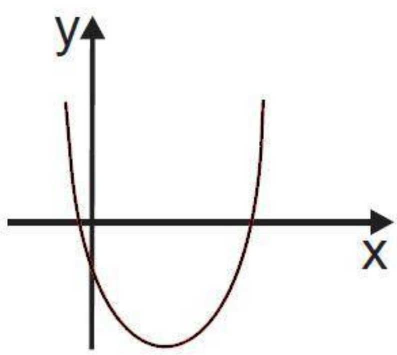
b) – 1, 0 e 1.

c) 0, 1 e 2.

d) – 2, 1 e 3.

e) – 1, 2 e 3.

5. Observe o gráfico de uma função do segundo grau a seguir



De acordo com o gráfico analise as afirmações:

I – O gráfico acima representa uma função estritamente crescente.

II – O gráfico acima representa uma função estritamente decrescente.

III – Os zeros da função representada no gráfico acima são positivos.

IV – Os zeros da função representada no gráfico acima é composto por um número positivo e outro negativo.

Quais das afirmações acima são falsas?

a) I, II, III e IV

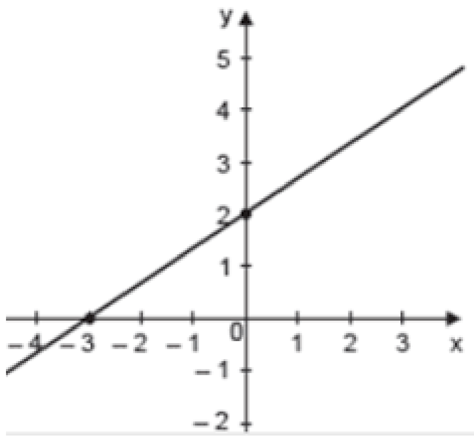
b) I, II e III

c) I, III e IV

d) I e II

e) I e III

6. No gráfico abaixo, está representada uma função polinomial do $1^{\underline{o}}$ grau.



Qual é a raiz dessa função?

a) – 3

b) – 1

c) 1

d) 2

e) 3

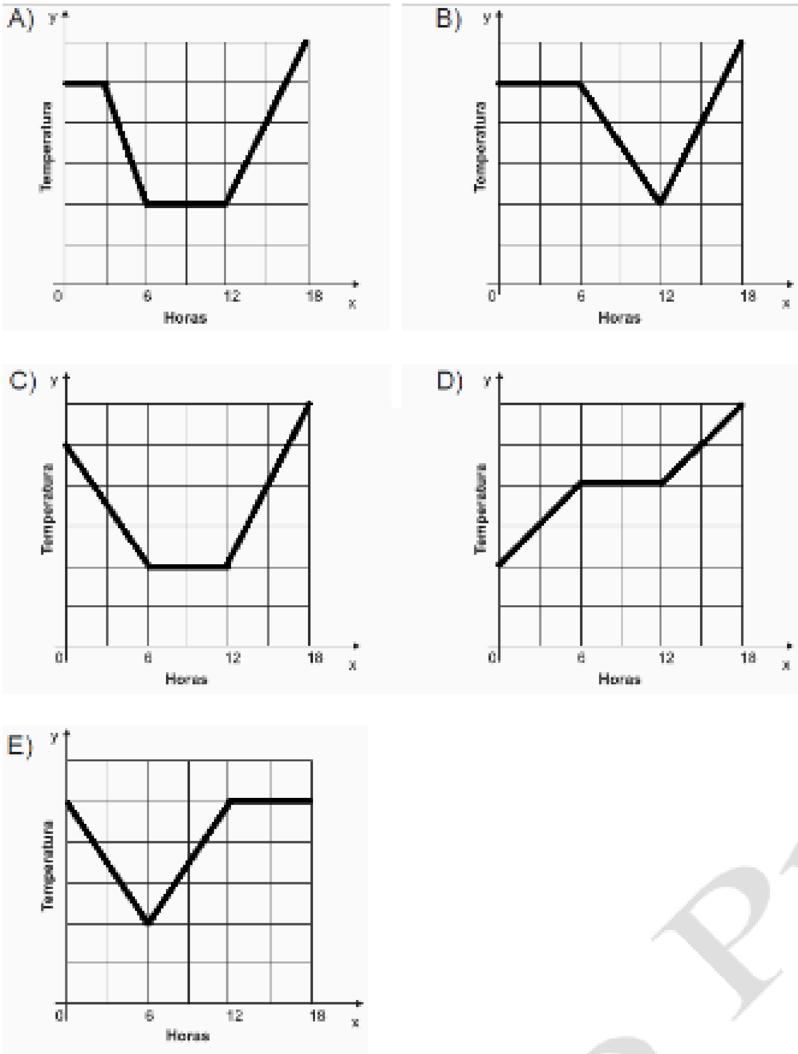
3.9 Descritor D_{21} - Teoria e Problemas

O descritor D_{21} continua com a discussão sobre o interpretar graficamente uma função. Neste, particular descritor, iremos tratar de associar informações analíticas de uma função com a sua representação gráfica.

3.9.1 Associando informações analíticas de uma função ao seu gráfico.

Vamos discutir esse descritor por meio da resolução de problemas.

Exemplo 3.24 *A previsão do tempo para uma cidade brasileira foi noticiada da seguinte maneira: "Durante a madrugada a temperatura diminuiu, permanecendo constante pela manhã, mas aumentou no período da tarde". Qual dos gráficos abaixo melhor representa a situação descrita nesse texto?*

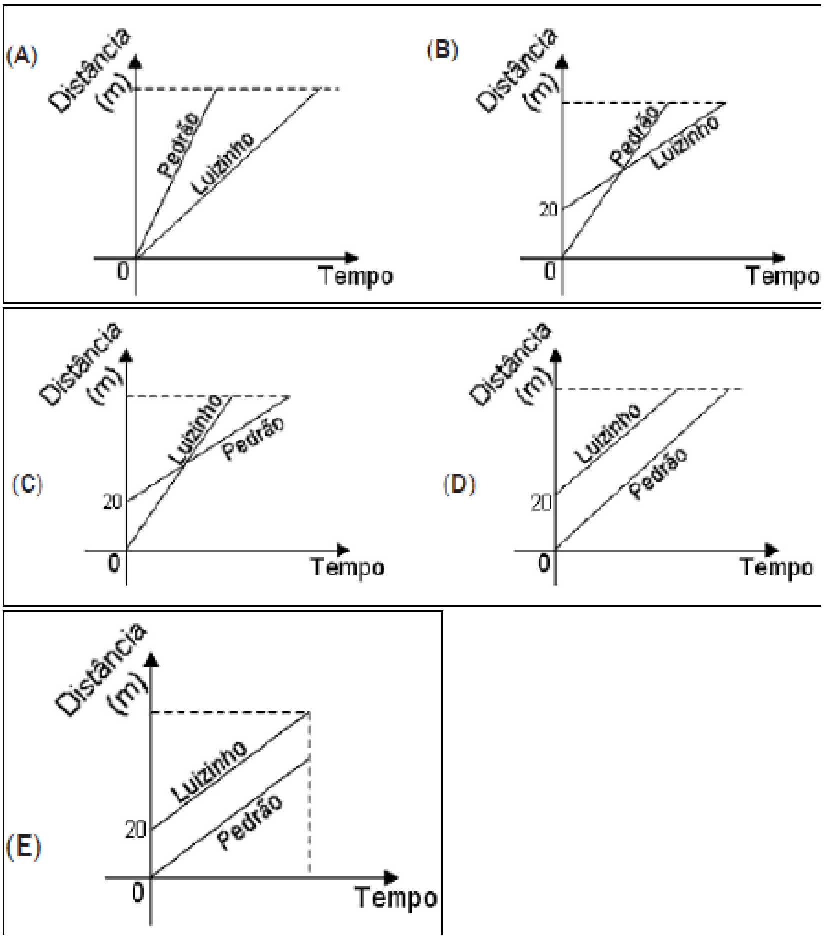


Resolução 63 *Note que pela informação contida no enunciado, temos o seguinte comportamento gráfico:*

- *Decrescente: "Durante a madrugada a temperatura diminuiu"*
- *Constante: "permanecendo constante pela manhã"*
- *Crescente: "mas aumentou no período da tarde"*

Segundo essa descrição, a única função que descreve este comportamento está no item C).

Exemplo 3.25 *Luizinho desafia seu irmão mais velho, Pedrão, para uma corrida. Pedrão aceita e permite que o desafiante saia 20 metros a sua frente. Pedrão ultrapassa Luizinho e ganha a corrida. O gráfico que melhor ilustra essa disputa é:*



Resolução 64 *Temos aqui duas situações gráficas a discutir:*
Luizinho

- *Parte de 20 metros e possui uma inclinação menor do que a de Pedrão, uma vez que foi ultrapassado por Pedrão.*

Pedrão

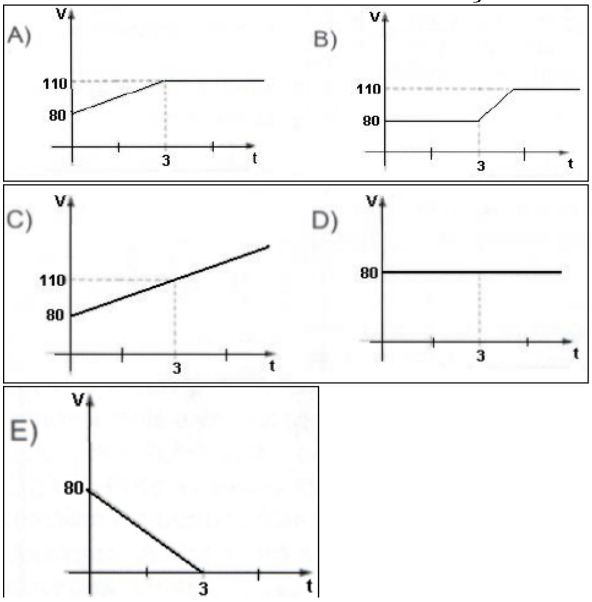
- *Parte de 0 metros e ultrapassa Luizinho no caminho.*

O gráfico que traz essa descrição está no item B).

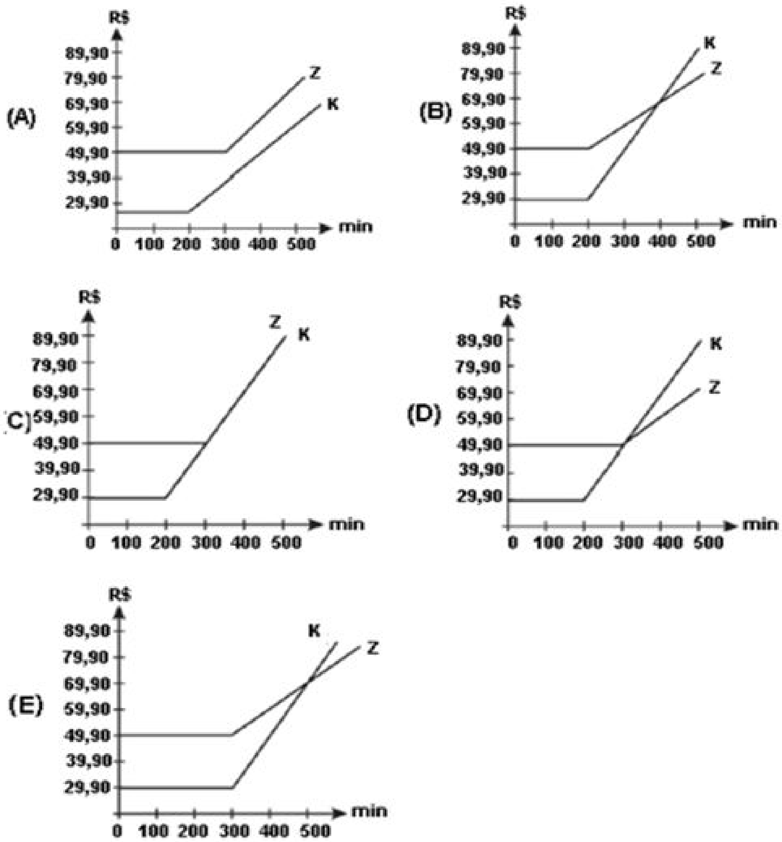
3.9.2 Problemas Propostos

1. Um automóvel parte da cidade de “Monte Verde” em direção a cidade de “Alegre”. Durante as 3 primeiras horas de viagem, ele mantém uma velocidade constante

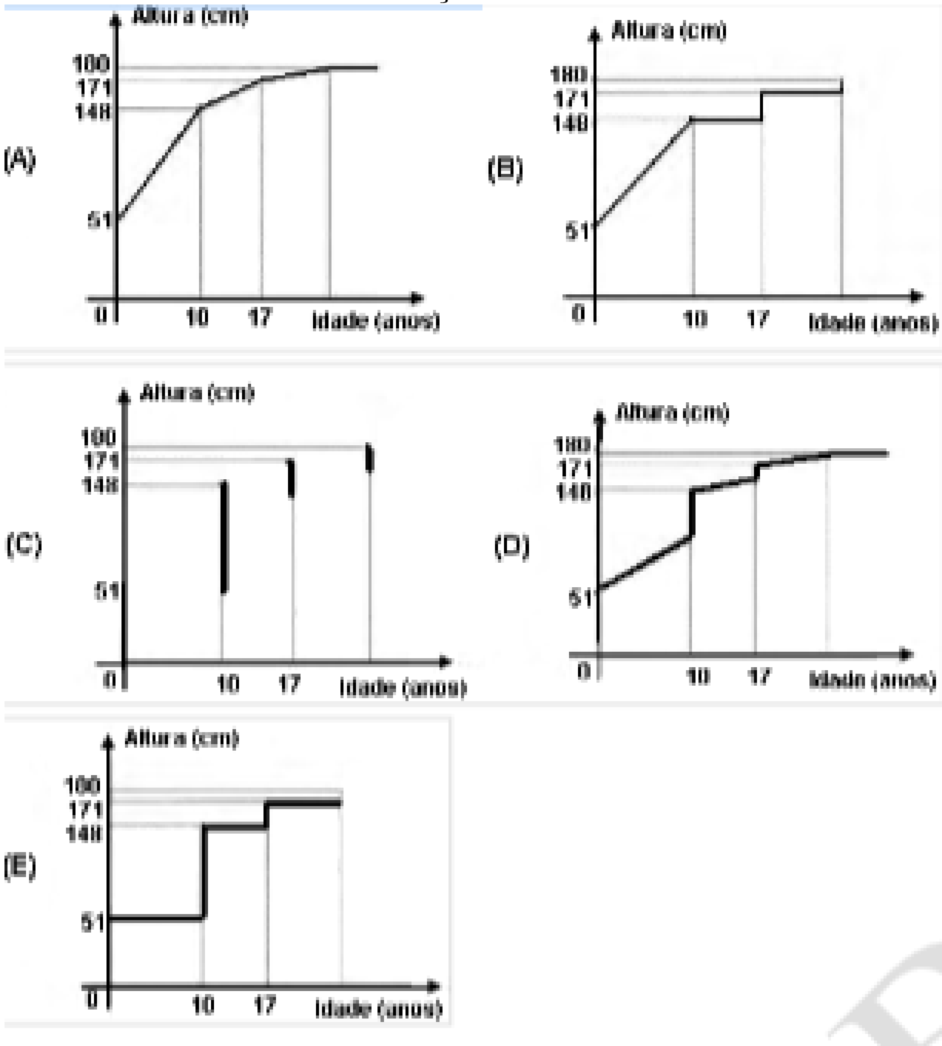
de 80 km/h. Daí em diante, começa a aumentar sua velocidade até atingir 110 km/h e permanece nessa velocidade. Dentre os gráficos abaixo, aquele que ilustra a velocidade do automóvel em função do tempo é:



2. Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano k, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente. O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é



3. Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas. Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?



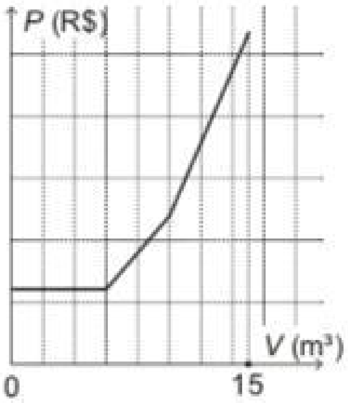
4. Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

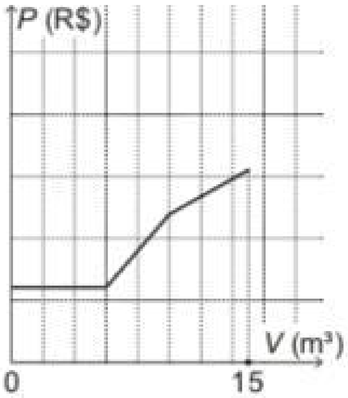
- Faixa 1: para consumo de até 6 m^3, valor fixo de R$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 m3 e até 10 m^3, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m3;

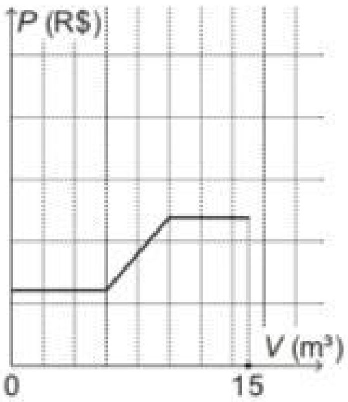
- Faixa 3: para consumo superior a 10 m^3, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m^3.

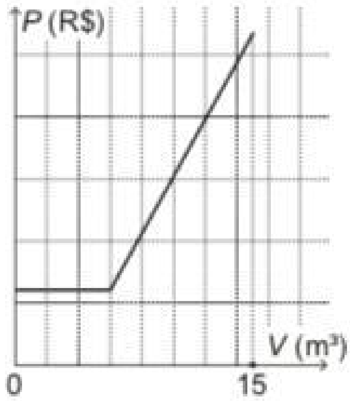
Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m^3 por mês.

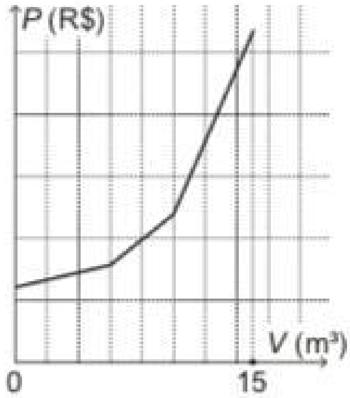
O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é

A


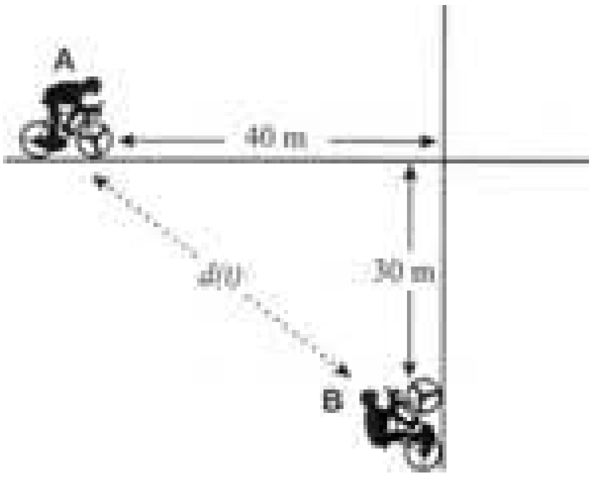
B


C


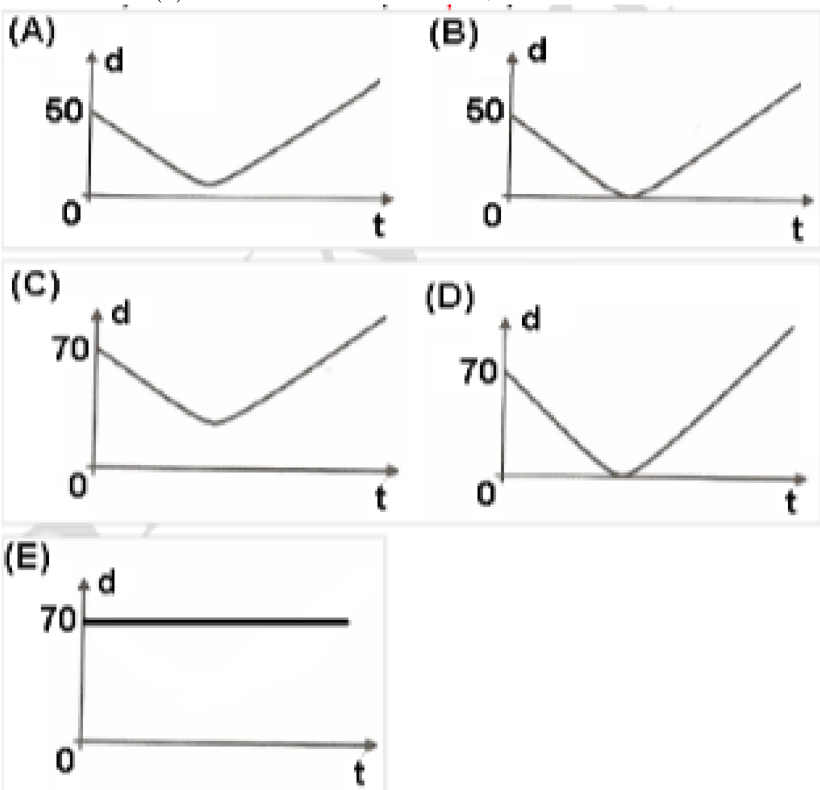
D


E


5. Na figura estão representados dois ciclistas A e B, pedalando a caminho de um cruzamento. Ao chegar ao cruzamento, ambos continuam em frente. No instante $t = 0$, os ciclistas A e B encontra-se, respectivamente, a 40 metros e a 30 metros do cruzamento. Os ciclistas pedalam ambos à mesma velocidade, que se mantém constante.



Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que, para cada valor de t, dá a distância d(t) entre os dois ciclistas, no instante t?



3.10 Descritor D_{22} - Teoria e Problemas

O descritor D_{22} trabalha a resolução de problemas que envolvem as progressões aritméticas (PA) e as progressões geométricas (PG). Apresentaremos as definições e os principais resultados sobre PA e PG.

3.10.1 Progressões Aritméticas

A **progressão aritmética** é uma sequência de números no qual a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma. De modo mais formal:

Uma sequência $a_1,\ a_2, \ldots, a_k$ é uma progressão aritmética, de modo mais simples, uma PA, se

$$a_j - a_{j-1} = r$$

para $j \geq 2$. O valor r é chamado de razão da PA.

Uma PA é finita se existe uma quantidade finita de termos. Caso contrário, a PA é dita infinita. Os termos de uma PA são obtidos acrescentado a razão ao termo anterior. Isto é, se a_1 for o primeiro termo de uma PA de razão r, então

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Aqui, a_n indica o **n - ésimo termo da** PA ou termo de posição n. Podemos classificar uma PA em crescente, decrescente ou constante em função da razão r.

- **Crescente**: Quando $r > 0$

  Exemplo 3.26 *A sequência*

  $$\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 \ldots\}$$

  é uma PA crescente de razão 3.

- **Decrescente**: Quando $r < 0$

  Exemplo 3.27 *A sequência*

  $$\{7, 1, -5, -11, -18, -24, -30, -36 \ldots\}$$

  é uma PA decrescente de razão -6.

- **Constante**: Quando $r = 0$

  Exemplo 3.28 *A sequência*

  $$\{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 \ldots\}$$

é uma PA constante de razão 0.

PA constante são também chamadas de sequências estacionárias.

O primeiro resultado importante que discutiremos em PA e que nos permite resolver bons problemas, é conhecido na literatura como fórmula do termo geral.

Seja a_1, a_2, $\ldots$, a_k, $\ldots$ uma PA de razão r. Então o n-ésimo termo a_n (termo de posição n) é calculado por meio da fórmula

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

tal fórmula é conhecida como fórmula do termo geral da PA.

Exemplo 3.29 *Um atleta iniciou seu treino de natação nadando 700 metros no primeiro dia e, a cada dia, acrescentou 150 metros à distância que nadou no dia anterior. A distância, em metros, que ele nadou no quinto dia de treinamento foi*

a) 450 b) 850 c) 1300 d) 1450 e) 1600

Resolução 65 *Uma vez que a cada dia, o atleta acrescentou 150 metros a distância que nadou no dia anterior, temos que as distâncias nadadas pelo atleta formam uma PA de razão $r = 150$, cujo primeiro termo $a_{=}700$. Como estamos interessados em calcular o quanto o atleta nadou no quinto dia, buscamos o valor de a_5 da PA. Ou seja, calcularemos o valor de a_n, com $n = 5$. Assim, usamos a fórmula do termo geral para $n = 5$, $r = 150$ e $a_1 = 700$. Desta forma, temos*

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ a_5 &= 700 + (5-1) \times 150 \\ a_5 &= 700 + 4 \times 150 \\ a_5 &= 1300 \text{ metros} \end{aligned}$$

Exemplo 3.30 *A taxa de um determinado condomínio é paga de acordo com o andar em que se mora. Quem mora no 1º andar paga R\$ 105,00; no 2º andar, R\$ 120,00; no 3º andar R\$ 135,00. Sabendo que os valores a serem pagos estão em cada andar obedece a mesma regra para os três primeiros, quanto pagará em reais, quem mora no décimo andar?*

a) 240 b) 225 c) 235 d) 130 e) 120

Resolução 66 *Temos uma PA com $a_1 = 105$, $a_2 = 120$, $a_3 = 135$, $\ldots$ forma uma PA de razão $r = 15$. Estamos interessados em calcular a_10. Assim*

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ a_{10} &= 105 + (10-1) \times 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 105 + 9 \times 15 \\ a_{10} &= 240 \textit{ reais} \end{aligned}$$

Podemos atribuir para as progressões aritméticas finitas a soma de seus termos. Isto é

Sejam a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n os n primeiros termos de uma PA. Então a soma dos n primeiros termos S_n,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

pode ser calculada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

Exemplo 3.31 *A empresa que realiza a manutenção nas rodovias estaduais do Norte do país, pintou as faixas de divisão das pistas após uma reforma. No primeiro dia de trabalho, a empresa pintou 5 km de faixa e nos dias subsequentes, sempre pintava 5 km a mais que no dia anterior até concluir o serviço. Quantos quilômetros no total foram pintados até o final do sexto dia de serviço?*

a) 90 *b) 95* *c) 100* *d) 105* *e) 125*

Resolução 67 *Neste problema estamos interessados no total de quilômetros pintados até o sexto dia. No contexto, consiste em realizar a soma*

$$S_6 = a_1 + a_2 + \cdots + a_6$$

Pela fórmula que apresentamos anteriormente, necessitamos somente do primeiro termo $a_1 = 5$ *e do último termo* a_6*, ao qual devemos calcular (por meio da fórmula do termo geral) com* $r = 5$.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ a_6 &= 5 + (6-1) \times 5 \\ a_6 &= 5 + 5 \times 5 \\ a_6 &= 30 \textit{ reais} \end{aligned}$$

Desta forma,

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6) \times 6}{2} = \frac{(5 + 25) \times 6}{2} = 30 \times 3 = 90 \textit{ quilômetros}$$

Existem propriedades que são interessantes para uma progressão aritmética

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ , a_n$$

- A soma dos extremos é igual à soma dos termos equidistantes dos extremos.

$$a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + a_n \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq n/2 \ ou (n-1)/2$$

- Dada uma progressão aritmética qualquer, e um termo a_k, a média aritmética entre o seu sucessor e o seu antecessor é igual ao próprio termo a_k

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

  De modo geral, vale

$$a_k = \frac{a_{k-j} + a_{k+j}}{2}$$

  ou seja, a_k é a média aritmética de termos equidistantes a a_k.

Exemplo 3.32 *O valor de n que torna a sequência*

$$\{2 + 3n, -5n, 1 - 4n\}$$

uma progressão aritmética pertence ao intervalo

a) [-2, -1]. *b) [-1, 0].* *c) [0, 1].* *d) [1, 2].* *e) [2, 3].*

Resolução 68 *Usando que o termo do meio é a media dos extremos, temos*

$$-5n = \frac{2 + 3n + 1 - 4n}{2} \quad \textit{implica que} \quad -10n = 3 - n \quad \textit{logo,} \quad n = -\frac{1}{3}$$

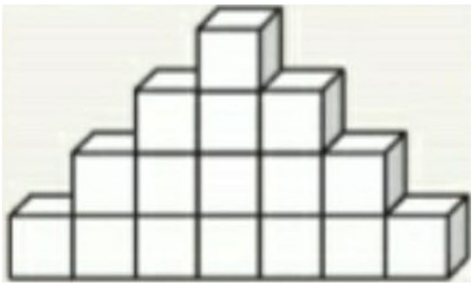
Assim, $n \in [-1, 0]$.

3.10.2 Problemas Propostos

1. Os ganhos de uma empresa, ao decorrer do ano, foram de R$ 800.000 no primeiro mês, e, a cada mês, houve um aumento de R$15.000 em relação ao mês anterior. Caso essa tendência seja mantida durante todos os meses, o lucro mensal dessa empresa, em dezembro, será de:
   a) R$ 165.000
   b) R$ 180.000
   c) R$ 816.500
   d) R$ 965.000
   e) R$ 980.000

2. Considere uma PA que tenha razão –3 e o primeiro termo é igual a –10. O trigésimo sétimo termo desta PA é
   a) -118 b) -98 c) -78 d) 98 e) 118

3. Carla fez uma torre com cubos de madeira. No desenho abaixo está representado alguns cubos da parte de cima dessa torre.



Quantos cubos tem a base da torre de Carla, sabendo que ela tem 10 andares?
a) 10 b) 16 c) 19 d) 20 e) 26

4. O diretor de uma escola resolveu melhorar sua biblioteca. Para tanto, pediu aos alunos que o ajudassem trazendo para a escola no primeiro mês 2 livros, no segundo mês 3 livros, no terceiro 4 livros e, assim, sucessivamente. Quantos livros os alunos deveriam trazer no décimo segundo mês?
a) 11 b) 12 c) 13 d) 20 e) 26

5. Cláudia foi a um teatro e observou que a distribuição das cadeiras para a plateia foi feita da seguinte maneira: a primeira fileira, a mais próxima ao palco, possui 6 assentos, a segunda fileira, 8 assentos e assim sucessivamente, de forma que as quantidades de assentos em cada fileira seguem uma progressão aritmética. Cláudia sentou-se em uma cadeira da última fileira dessa plateia, a qual continha 26 assentos. De acordo com essa distribuição, a quantidade total de cadeiras para a plateia nesse teatro era de
a) 11 b) 40 c) 70 d) 176 e) 289

6. Qual o décimo quarto termo de uma PA de razão 3,5 e primeiro termo 17,5?
a) 56 b) 59,5 c) 63 d) 66,5 e) 70

7. Analise as sequências a seguir:

A – (1, 4, 7, 10, 13)
B – (1, 1, 1, 1, 1, 1)
C – (9, 3, -3, -9, -15...)
D – (1, 0, -1, 2, -2, 3, -3)

Sobre as sequências, podemos afirmar que:
a) Todas são progressões aritméticas.
b) Somente A e C são progressões aritméticas.
c) Somente D não é uma progressão aritmética.

d) Somente B e D são progressões aritméticas.

e) Nenhuma das sequências representa uma progressão aritmética.

8. Um atleta de alta performance tem se preparado para a disputa da Maratona do Rio, que possui atualmente um percurso de 42 km. Para isso, ele começou percorrendo 14 km no primeiro dia, e, a cada dia, ele acrescentou 5 km em relação ao dia anterior. A distância total percorrida, em km, por esse atleta durante uma semana de treino é de:

   a) 44 b) 244 c) 193 d) 198 e) 203

9. Uma empresa faturou R$ 150.000 no primeiro ano, R$ 148.000 no segundo ano, R$ 146.000 no terceiro ano, e assim sucessivamente. Durante a primeira década de existência dessa empresa, ela faturou um total de:

   a) 1.500.000
   b) 3.500.000
   c) 3.780.000
   d) 1.410.000
   e) 1.280.000

10. A Copa do Mundo de Futebol é um torneio realizado a cada 4 anos. A sequência abaixo relaciona os anos em que houve a Copa do Mundo desde a conquista do primeiro título brasileiro em 1958.

$$(1958, 1962, 1966, 1970, ...)$$

   Quantos torneios foram realizados de 1958 até 2014?

   a) 13 b) 14 c) 15 d) 56 e) 60

11. A indústria de motocicletas JAPAMOTO vai instalar uma fábrica no país. No primeiro mês, ela vai fabricar 300 motocicletas, aumentando a produção, a cada mês, em 50 motocicletas, até atingir a meta de produzir 2 000 motocicletas por mês. Mantendo esse ritmo, em quantos meses a JAPAMOTO vai atingir essa meta?

   a) 15 b) 20 c) 35 d) 40 e) 50

12. Carlinhos resolveu colecionar selos e, em janeiro, seu pai lhe presenteou com seus primeiros 6 selos. Em cada um dos meses seguintes, seu pai lhe deu sempre dois selos a mais do que a quantidade que havia lhe dado no mês anterior. Quantos selos Carlinhos terá em sua coleção no final de dezembro desse ano?

   a) 216 b) 204 c) 30 d) 28 e) 20

3.10.3 Progressões Geométricas

A **progressão geométrica** é uma sequência de números no qual a razão entre dois números (termos) consecutivos é sempre a mesma. De forma mais formal

Uma sequência $a_1,\ a_2,\ldots,a_k$ é uma progressão geométrica, de modo mais simples, uma PG, se

$$\frac{a_j}{a_{j-1}} = q$$

para $j \geq 2$. O valor q é chamado de razão da PG.

Uma PG é finita se existe uma quantidade finita de termos. Caso contrário, a PG é dita infinita. Os termos de uma PG são obtidos multiplicando a razão ao termo anterior. Isto é, se a_1 for o primeiro termo de uma PG de razão q, então

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Aqui, a_n indica o **n - ésimo termo da** PG ou termo de posição n.

Exemplo 3.33 *A sequência*

2,4,8,16, 32, 64, 128, 256...

é uma PG de razão 2.

Podemos classificar as progressões geométricas como crescente, decrescente, contante e adicionalmente oscilante.

- **Crescente:** Uma PG é crescente se a razão $q > 1$ e $a_1 > 0$.

  Exemplo 3.34 *A sequência*

  $$\{1, 3, 9, 27, 81, ...\}$$

  é crescente com $q = 3$ *e* $a_1 = 1$.

- **Decrescente:** Uma PG é decrescente se a razão $q < 1$ e $a_1 > 0$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

  Exemplo 3.35 *A sequência*

  $$\{1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, ...\}$$

  é decrescente com $q = 1/3$ *e* $a_1 = 1$.

Exemplo 3.36 *A sequência*

$$\{-2, -6, -18, -54, ...\}$$

é decrescente com $q = 3$ e $a_1 = -2$.

- **Oscilante:** Uma PG é oscilante se a razão $q < 0$ e $a_1 \neq 0$.

  Exemplo 3.37 *A sequência*

  $$\{3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, -384, 768, \ldots\}$$

  é oscilante com $q = -2$ e $a_1 = 3$.

- **Constante:** Uma PG é constante se a razão $q = 1$ e $a_1 \neq 0$

  Exemplo 3.38 *A sequência*

  $$\{4, 4, 4, 4, 4, 4 \ldots\}$$

  é oscilante com $q = 1$ e $a_1 = 4$.

Da mesma forma que a PA, podemos determinar o termo de posição n na PG por meio do primeiro termo a_1 e a razão q.

Seja a_1, a_2, $\ldots$, a_k, $\ldots$ uma PG de razão q. Então o n-ésimo termo a_n (termo de posição n) é calculado por meio da fórmula

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

tal fórmula é conhecida como fórmula do termo geral da PG.

Exemplo 3.39 *Em uma experiência, Pablo registra a amplitude da extensão de uma mola. No 1º segundo, ele registrou uma amplitude de 24 centímetros, no 2º segundo, uma amplitude de 12 centímetros, e, assim por diante, registrando, em cada segundo, a metade da amplitude registrada no segundo anterior. A amplitude registrada no 4° segundo foi de*

a) 3 centímetros.

b) 6 centímetros.

c) 12 centímetros.

d) 36 centímetros.

e) 45 centímetros.

Resolução 69 *Note que as amplitudes registradas forma uma PG de razão* $\frac{1}{2}$ *no qual* $a_1 = 24$ *e estamos interessados em determinar* a_4. *Portanto,*

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \textit{implica que} \quad a_4 = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{24}{8} = 3 \ \textit{centímetros}$$

Exemplo 3.40 *Um fazendeiro fabricava queijos utilizando 512 litros de leite diariamente. Para diminuir a intensidade do trabalho decidiu, de forma gradativa, parar de fabricar queijos e revender o leite. Na primeira semana, após essa decisão, ele vendeu 8 litros de leite por dia; na segunda semana, 16 litros por dia; na terceira semana 32 litros por dia; e assim por diante, até que todos os 512 litros fossem totalmente vendidos por dia. Mantendo o mesmo padrão nas vendas de leite, em quantas semanas o fazendeiro conseguiu substituir totalmente a produção de queijos pela venda do leite?*
a) 3 *b) 6* *c) 7* *d) 33* *e) 64*

Resolução 70 *Começamos a resolução notando que a quantidade de leite vendida a cada dia*

$$8, \ 16, \ 32, \ \dots \ , \ 512$$

formam uma PG de razão 2. De fato,

$$q = 2 = \frac{16}{8} = \frac{32}{16}$$

Estamos interessados em determinar n *tal que* $a_n = 512$. *Usando a fórmula do termo geral da PG com* $a_1 = 8$ *e* $q = 2$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ 512 &= 8 \cdot 2^{n-1} \ \textit{dividindo por 8} \\ \frac{512}{8} &= 2^{n-1} \\ 64 &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Este processo, nos leva a resolver a equação $2^{n-1} = 64$. *Tais equações são chamadas de equações exponenciais, pois a variável a determinar é um expoente. Usamos aqui a fatoração de 64 na base 2 como estratégia de solução. Visto que* $64 = 2^6$, *temos*

$$2^{n-1} = 2^6 \quad \textit{bases iguais implicam expoentes iguais} \quad n - 1 = 6 \ \textit{logo,} \ n = 7$$

Semelhante ao que fizemos para as progressões aritméticas, a PG também possuem uma fórmula para a soma finita de seus termos

Sejam a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n os n primeiros termos de uma PG. Então a soma dos n primeiros termos S_n,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

pode ser calculada por

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

Exemplo 3.41 *Qual é a quantidade de elementos da PG finita (1, 2, 4,...), sabendo que a soma dos termos dessa PG é 1023?*

Resolução 71 *Note que (1, 2, 4,...) é uma PG de razão* $q = 2$ *e primeiro termo* $a_1 = 1$. *Estamos interessados em determinar* n *de tal forma que* $S_n = 1023$. *Assim,*

$$\underbrace{S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}}_{a_1 = 1 \text{ e } q = 2} \quad \textit{implica que} \quad 1023 = 2^n - 1 \quad \textit{logo,} \quad 2^n = 1024 = 2^{10} \quad e \quad n = 10$$

Exemplo 3.42 *Ao ser atacada por uma praga desconhecida, os frutos de uma mangueira foram apodrecendo dia após dia, obedecendo a uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 2 e razão igual a 3. Se no décimo dia apodreceram os últimos frutos, calcule o número de frutos atacados pela praga.*

Resolução 72 *O número de frutos atacados pela praga é igual a soma dos 10 primeiros termos de uma PG de razão 3 e primeiro termo igual a 2. Assim,*

$$\underbrace{S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}}_{a_1 = 2,\ n = 10 \text{e } q = 3} \quad \textit{implica que} \quad S_{10} = 2\frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 3^{10} - 1 = 59048 \quad \textit{frutos}$$

Para as progressões geométricas, podemos considerar a soma infinita. Neste caso, para que ela convirja (o valor da soma é finito) devemos ter que a razão q satisfaça uma condição que é dada a seguir:

Seja a_1, a_2, $\ldots$, a_k, $\ldots$ uma PG de razão q. Então a soma infinita S_∞ dos termos da PG é

$$\begin{array}{rcll} S_\infty & = & \infty & \textbf{se} \quad |q| \geq 1 \\ S_\infty & = & \dfrac{a_1}{1 - q} & \textbf{se} \quad |q| < 1 \end{array}$$

Exemplo 3.43 *A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; ...) é:*

a) 3,1 *b) 3,9* *c) 3,99* *d) 3,999* *e) 4*

Resolução 73 *Vamos verificar que (3; 0,9; 0,09; 0,009; ...) é uma PG. De fato,*

$$a_2 \div a_1 = \frac{0,9}{3} = 0,3$$

$$a_3 \div a_2 = \frac{0,09}{0,9} = 0,1$$

$$a_4 \div a_2 = \frac{0,009}{0,09} = 0,1$$

$$\vdots$$

Por essas razões sucessivas, temos que a partir de a_2, temos uma progressão geométrica de razão 0,1. Assim, a soma ao qual interessamos calcular é $S = 3 + S_\infty$ onde S_∞ é a soma dos termos da PG (0,9; 0,09; 0,009; ...); Usando a fórmula da soma infinita

$$\underbrace{S_\infty = \frac{a_1}{1-q}}_{a_1=0,9 \text{ e } q=0,1} = \frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$$

Desta forma, $S = 3 + 1 = 4$.

3.10.4 Problemas Propostos

1. Amadeu comprou um notebook e vai pagá-lo em seis prestações crescentes de modo que a primeira prestação é de R$ 120,00, e cada uma das seguintes é o dobro da anterior. As prestações que Amadeu vai pagar, constituem os termos de uma progressão
   a) geométrica de razão 4.
   b) aritmética de razão 4.
   c) geométrica de razão 2.
   d) aritmética de razão 2.
   e) aritmética de razão 3.

2. A comporta de uma hidrelétrica está sendo aberta de modo que a cada segundo a quantidade de água despejada dobra. No 1º segundo, o volume de água escoado foi de 3000 litros. A quantidade de água despejada após 7 segundos, em litros, foi de
   a) 21.000 b) 63.000 c) 189.000 d) 192.000 e) 381.000

3. Sob orientação médica, Vitor inicia sua caminhada diária. No 1º dia caminha 2km, no 2º dia caminha 50% a mais que no dia anterior, no terceiro caminha 50% a mais que no dia anterior e assim por diante. A distância total, em quilômetros, percorrida por Vitor nos 4 (quatro) primeiros dias é:

a) 12,517 b) 13,75 c) 15,34 d) 16,25 e) 18,50

4. João faz depósitos mensais em sua poupança. Em janeiro de 2011, ele fez um depósito de R$ 5,00 e, a cada mês seguinte, depositou o dobro da quantia correspondente ao mês anterior. Qual foi a quantia depositada por João no mês de setembro de 2011?
a) R$ 1 280,00
b) R$ 2 304,00
c) R$ 2 555,00
d) R$ 2 560,00
e) R$ 4 608,00

5. Num programa de condicionamento físico, um atleta nada sempre o dobro da distância completada no dia anterior. Sabe-se que no 1º dia ela nadou 50 metros. No sexto dia, esse atleta nadará:
a) 3.200 metros.
b) 600 metros.
c) 300 metros.
d) 900 metros.
e) 1.600 metros.

6. Na segunda feira, Flora foi na Fonte dos Desejos, jogou 2 moedas e fez um pedido. Para reforçar, no dia seguinte, voltou à Fonte e jogou mais 4 moedas. Para ter certeza de que seu pedido seria atendido, ela continuou indo todos os dias na Fonte e, a cada dia, jogava sempre o dobro do número de moedas que havia jogado no dia anterior. Continuando dessa forma, qual é o total de moedas que Flora terá jogado na Fonte dos Desejos até o domingo?
a) 14 b) 64 c) 126 d) 128 e) 254

7. No começo do desenvolvimento embrionário, todos os tipos de células que irão constituir os diferentes tecidos originam-se de uma única célula chamada “zigoto” ou “célula-ovo”. Por meio de um processo chamado mitose, cada célula se divide em duas, ou seja, a célula-ovo origina duas novas células que, por sua vez, irá originar quatro outras e assim sucessivamente. Após observar 9 ciclos, um cientista registrou 8 192 células. Assinale a alternativa que mostra o número de células que existiam quando o cientista iniciou a observação.
a) 28 b) 30 c) 32 d) 34 e) 36

8. A soma dos elementos da sequência numérica infinita (-1/3; 0,3; 0,03; 0,003; ...) é:
a) 0 b) 1 c) 3 d) 1/3 e) 2/3

9. Qual o valor da soma dos termos da PG

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$$

a) 0 b) 1 c) 3 d) 2/3 e) 1/2

10. Em um laboratório de experiências, o número de bactérias, sob certas condições, se multiplica por três a cada hora. Se inicialmente existe uma bactéria na experiência, o número total de bactérias, após um período de sete horas, corresponde a

a) 27. b) 81. c) 243. d) 729. e) 2187.

3.11 Descritor D_{23} - Teoria e Problemas

O descritor D_{23} trabalha a habilidade de reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes. Já estudamos bastante este assunto e apresentaremos aqui dicas que nos auxilia a associação de uma função polinomial ao seu gráfico.

3.11.1 Associando a função $y = ax + b$ ao seu respectivo gráfico

Relembremos que as funções polinomiais do primeiro grau também são chamadas de funções afim. Tais funções possuem a forma

$$f(x) = ax + b$$

ao qual, por questões gráficas, podemos também escrever

$$y = ax + b$$

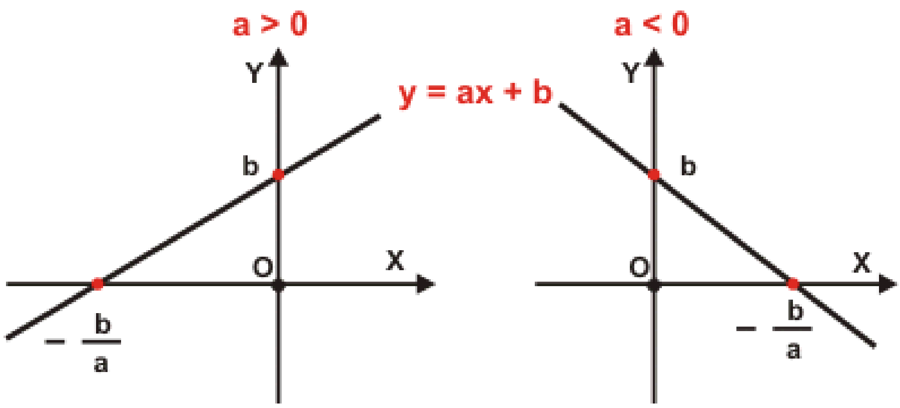
onde $y = f(x)$. Enfatizamos novamente que a e b denotam os coeficientes da função afim. Sendo:

- a - coeficiente angular
- b - coeficiente linear.

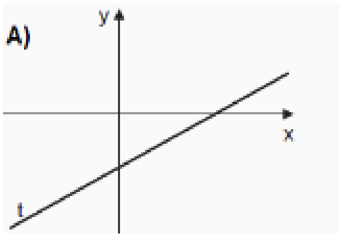
Tais coeficientes produzem interpretações para os gráficos associados. Primeiramente, não esquecemos que tais gráficos são retas.

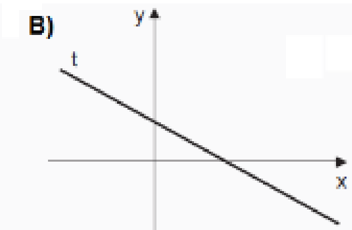
Coeficiente angular	**Interpretação gráfica**
$a > 0$	reta com inclinação para direita
$a < 0$	reta com inclinação para esquerda

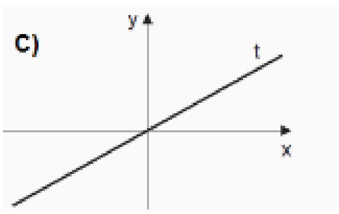
O coeficiente linear indica o valor numérico onde a reta corta o eixo y. Já onde a reta corta o eixo x é a raiz da função afim, ou seja, o valor $-\frac{b}{a}$. Tome muito cuidado para não cometer o erro de olhar o coeficiente angular como o valor onde a reta corta o eixo x.

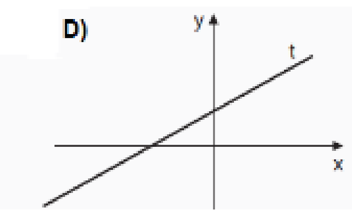


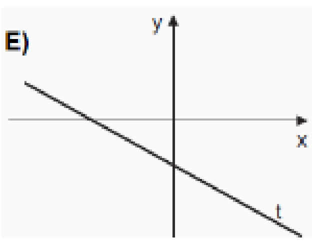
Exemplo 3.44 *A reta t, cuja equação reduzida é dada por $y = kx + z$, possui coeficientes k e z; com $k > 0$ e $z < 0$. O gráfico que representa essa reta é*





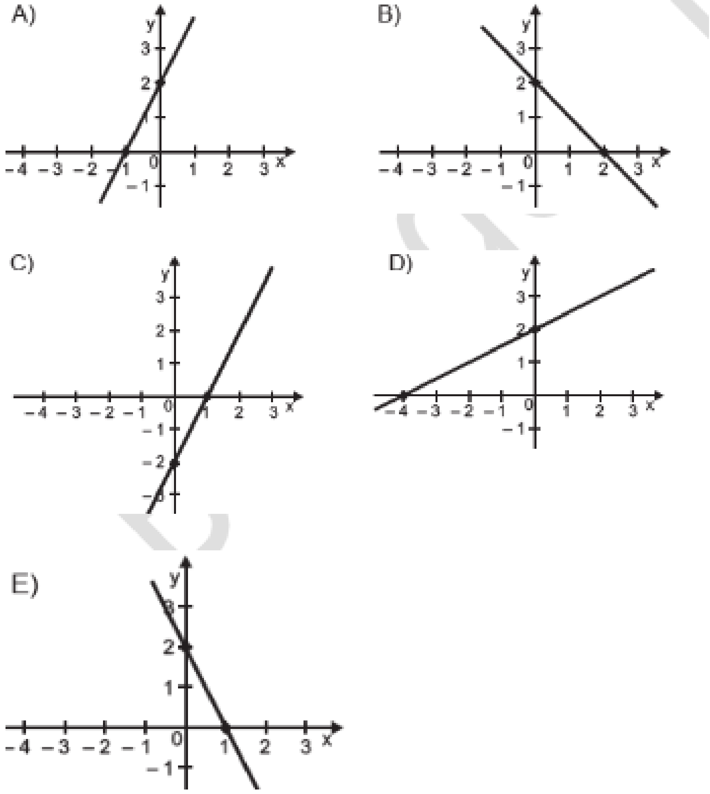






Resolução 74 *Dada a equação $y = kx + z$ com $k > 0$ e $z < 0$. Temos que o gráfico é uma reta com inclinação para a direita e cortando o eixo y na parte negativa. Portanto o item a) apresenta o gráfico desejado.*

Exemplo 3.45 *A função polinomial do 1º grau possui coeficientes angular e linear igual a 2. A representação gráfica dessa função f é*



Resolução 75 *Os coeficiente angular e linear são iguais a 2. Nossa reta desejada tem inclinação para a direita e corta o eixo y no valor 2. Assim, ficamos em dúvida entre os itens a) e d). Para descartarmos um dos itens, relembremos que a reta corta o eixo x na raiz que é dada por $-b \setminus a$. Assim, corta no valor*

$$a = 2 \quad b = 2 \quad \textit{implica que} \quad -\frac{2}{2} = -1 \quad \textit{onde a reta corta o eixo } x$$

Assim o item a) traz a resposta desejada.

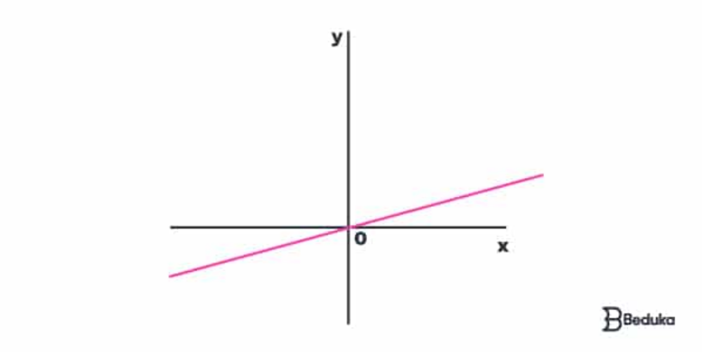
Relembremos que, caso não se tenha graficamente onde a reta corta o eixo x, devemos calcular os valor de a. Ou seja, calcular o coeficiente angular da reta. Isto pode ser feito por meio da fórmula

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{onde} \quad \Delta y = y_B - y_A \quad \text{e} \quad \Delta x = x_B - x_A$$

com os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ sobre a reta.

3.11.2 Problemas Propostos

1. A reta t de equação $y = jx + k$ está representada no gráfico abaixo.



Os coeficientes angular j e linear k, em relação ao sinal, são, respectivamente,

a) negativo e negativo.

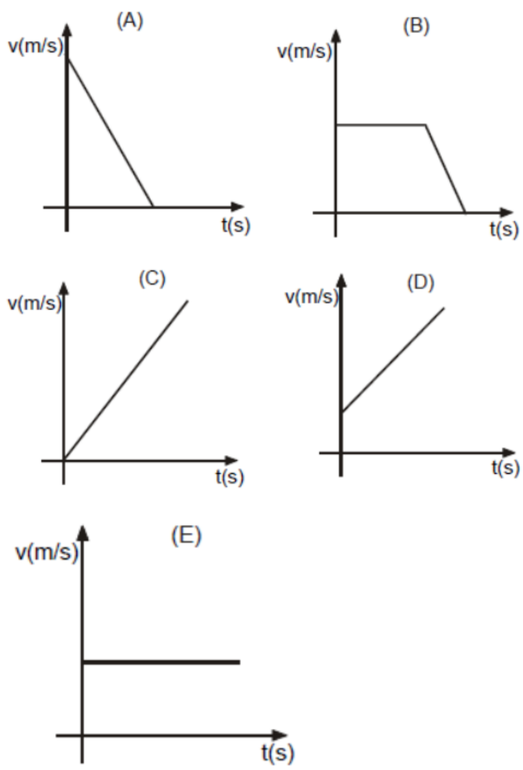
b) negativo e nulo.

c) positivo e negativo.

d) positivo e nulo.

e) positivo e positivo.

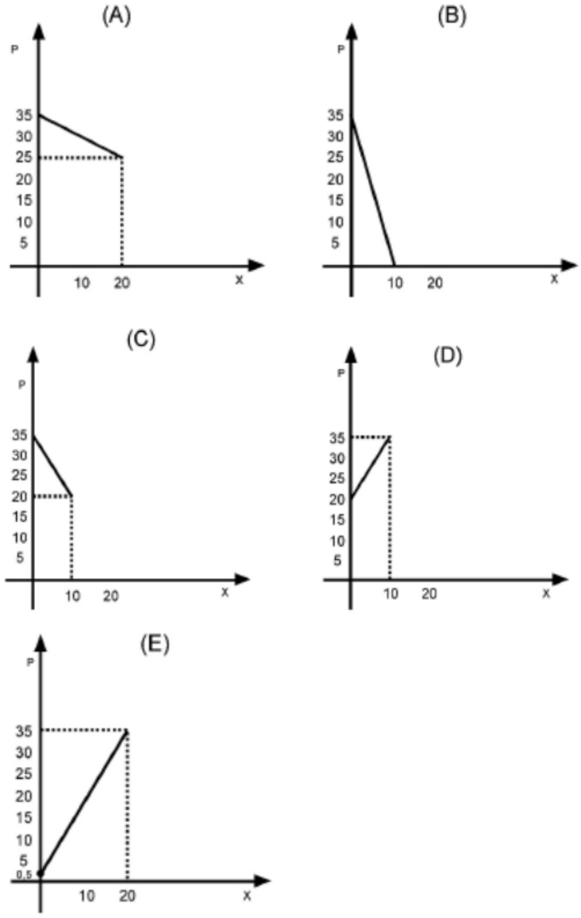
2. Uma pedra é largada de uma certa altura e cai em queda livre. A velocidade da pedra durante a queda pode ser expressa por $v = g \cdot t$, em que $g = 10m/s^2$ é a aceleração da gravidade e t o tempo transcorrido. Qual é o gráfico que melhor ilustra a velocidade da pedra em função do tempo, até o momento em que ela chega no solo?



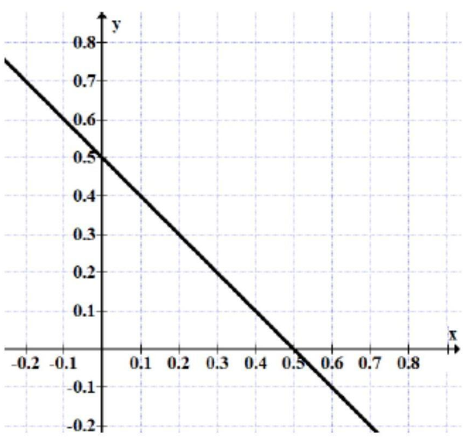
3. Em uma promoção de venda de camisas, o valor (P) a ser pago pelo consumidor é calculado pela expressão

$$P(x) = -\frac{1}{2}x + 35$$

onde x é a quantidade de camisas compradas ($0 \leq x \leq 20$). O gráfico que representa o preço P em função da quantidade x é:



4. Observe o gráfico a seguir:



Qual das funções a seguir é a representação correta deste gráfico?

a) $f(x) = -0,5x + 0,5$.

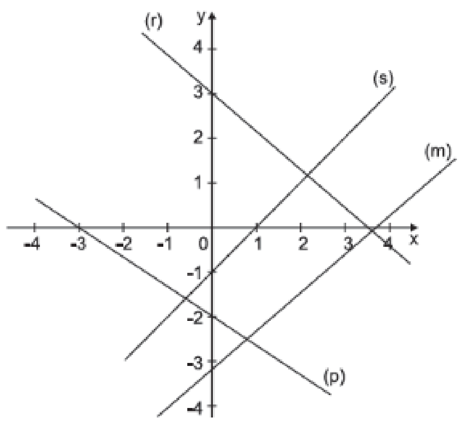
b) $f(x) = -x + 0,5$.

c) $f(x) = -x + 3/2$.

d) $f(x) = 0,5x + 1$.

e) $f(x) = x + 0,5$.

5. No plano cartesiano abaixo estão representadas as retas (r), (s), (p) e (m).



As retas que apresentam coeficiente angular positivo e coeficiente linear negativo são

a) (r) e (s).

b) (s) e (m).

c) (p) e (m).

d) (r) e (p).

e) (r) e (m).

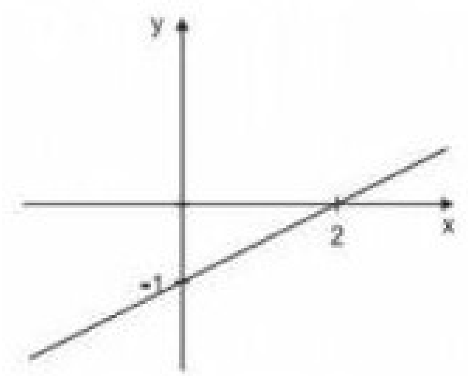
3.12 Descritor D_{24} - Teoria e Problemas

No último descritor estabelecemos a relação na direção de associar a função afim ao gráfico da função. No descritor D_{24} faremos o caminho contrário, dada o gráfico devemos estabelecer qual a função afim possui este gráfico.

3.12.1 Associando o gráfico de uma função afim ao seu gráfico

No descritor D_{23} realizamos um alicerce teórico para associar a função afim $f(x) = ax + b$ ao seu respectivo gráfico. Todo embasamento realizado será usado na discussão e resolução dos problemas relacionados ao descritor D_{24}. Portanto, não entraremos em mais detalhes teóricos para este descritor.

Exemplo 3.46 *Beatriz representou uma função do primeiro grau no plano cartesiano abaixo.*



Qual das funções a seguir é a representação correta deste gráfico?

a) $f(x) = -0,5x - 1.$

b) $f(x) = 2x - 1.$

c) $f(x) = -x + 3/2.$

d) $f(x) = 0,5x - 1.$

e) $f(x) = 0,5x + 1.$

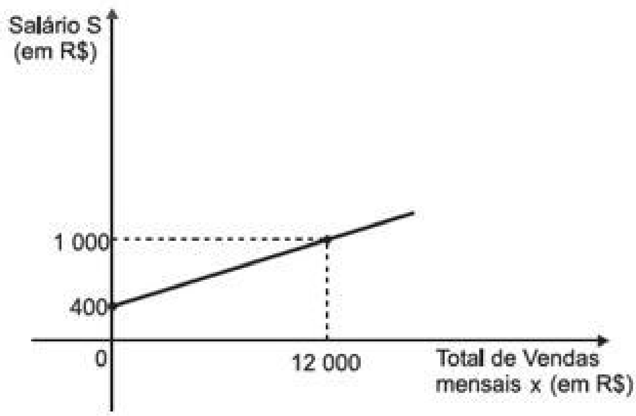
Resolução 76 *Podemos destacar dois pontos sobre o gráfico:* $A(0,-1)$ *e* $B(2,0)$*. Assim, o coeficiente angular da função é dado por*

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-(-1)}{2-0} = \frac{1}{2} = 0,5$$

O coeficiente linear da função afim (indica onde a reta corta o eixo y) é $b = -1$*. Assim, substituindo os coeficientes na forma* $f(x) = ax + b$*, obtemos* $f(x) = 0,5x - 1$*.*

3.12.2 Problemas Propostos

1. Um vendedor recebe um salário composto de uma parte fixa acrescida de uma parte variável, que corresponde à comissão sobre o total vendido no mês. O salário S em função do total x de vendas mensais pode ser visualizado no gráfico abaixo.

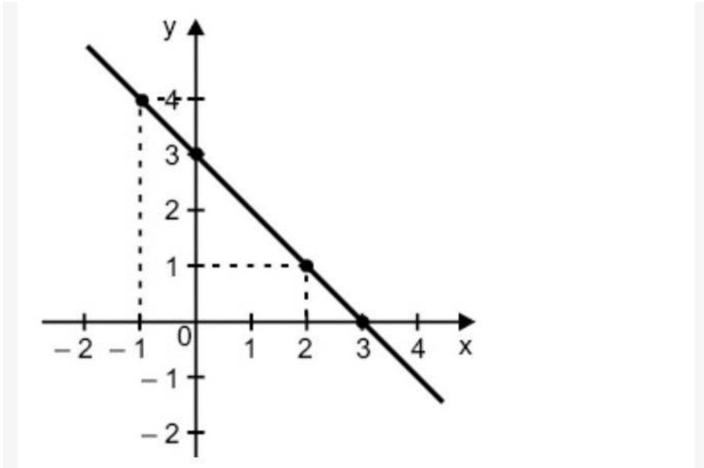


Qual das funções representa o salário desse vendedor?

a) $s(x) = 0,005x + 1000.$

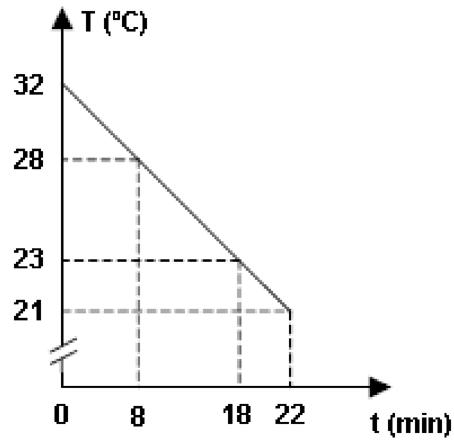
b) $f(x) = 0,05x + 400$.
c) $f(x) = 20x + 1000$.
d) $f(x) = 20x + 400$.
e) $f(x) = 20x - 8000$.

2. Observe abaixo o gráfico de uma função polinomial do 1° grau.



Qual é a lei de formação dessa função?
a) $s(x) = -3x + 3$.
b) $f(x) = -x + 4$.
c) $f(x) = -x + 3$.
d) $f(x) = 2x + 1$.
e) $f(x) = 3x + 3$.

3. A temperatura interna de uma geladeira, ao ser instalada, decresce com a passagem do tempo, conforme representado no gráfico:



A equação algébrica que relaciona a temperatura interna da geladeira (T) ao tempo (t), para o trecho representado no gráfico é
a) $T = 32 - 3t$.

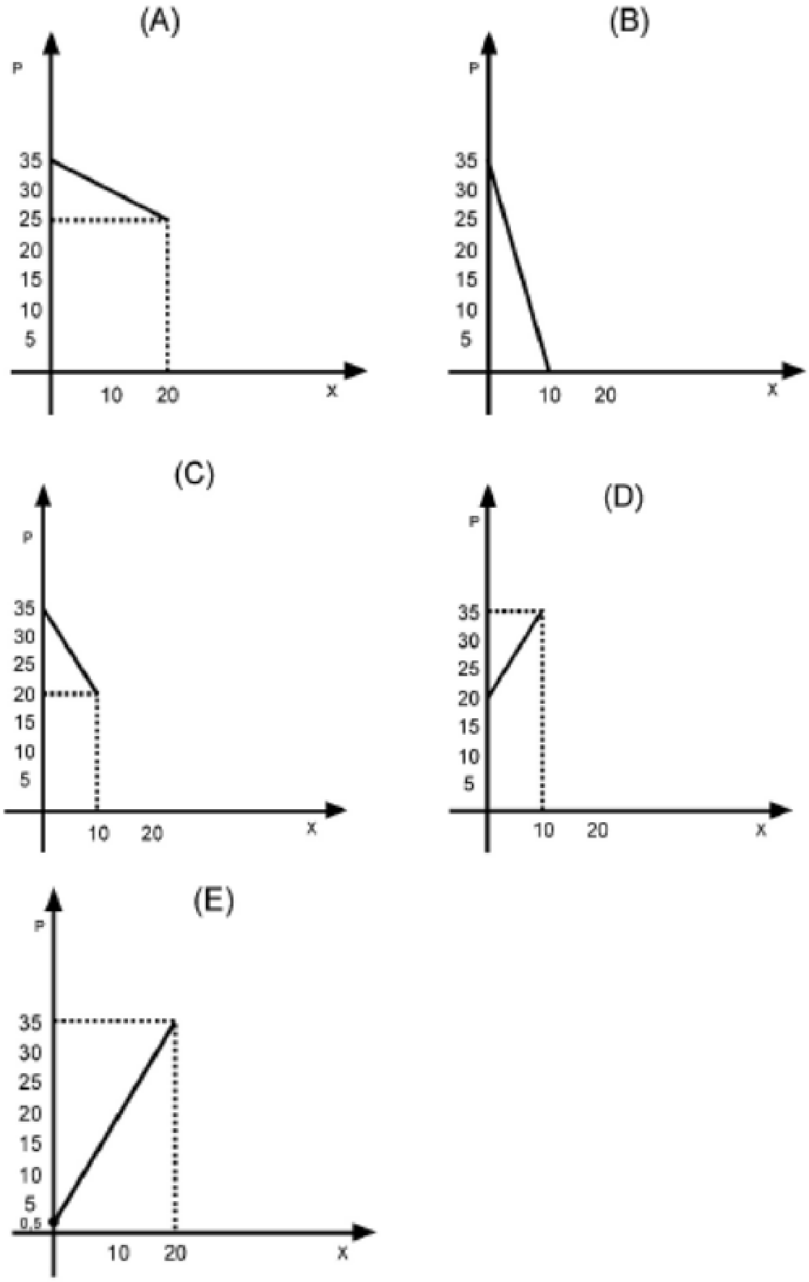
b) $T = 32 - 0,5t$.

c) $T = 32 - 4t$.

d) $T = 32 + 6t$.

e) $T = 32 + 4t$.

4. Para cada uma das funções descritas graficamente abaixo, escreva a lei de formação $f(x) = ax + b$.



3.13 Descritor D_{25} - Teoria e Problemas

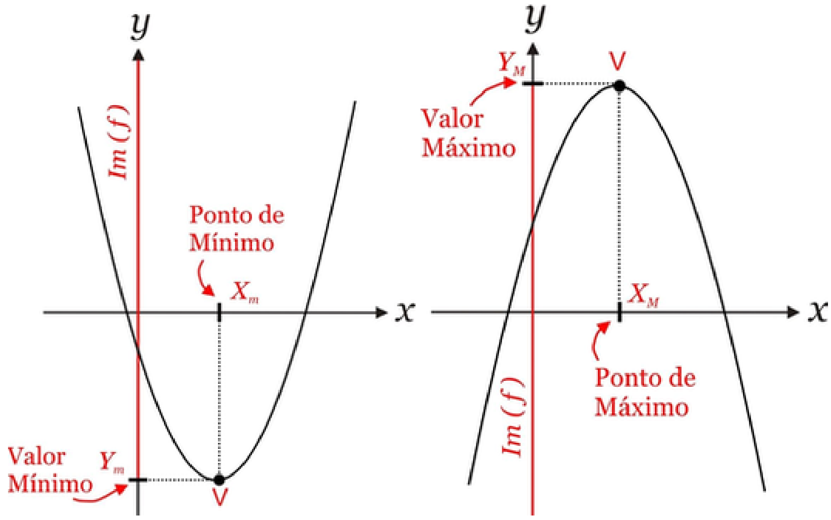
O descritor D_{25} está relacionado ao estudo de máximo e mínimos de funções quadráticas. Este descritor trata da resolução de problemas relacionados a máximos e mínimos. Já discutimos essa teoria, reforçaremos aqui somente o assunto de máximos e mínimos de funções quadráticas.

3.13.1 Máximos e Mínimos de funções quadráticas

Umas das principais características das funções quadráticas são a existência de máximo e mínimos globais.

Dizemos que x_V é um valor máximo global (respectivamente mínimo global) para uma função f, se $f(x_V) > f(x)$ (respectivamente $f(x_V) < f(x)$) para todo x. Neste caso, $f(x_V)$ é um valor máximo (respectivamente um valor mínimo).

Os valores máximos são valores de nível máximo, enquanto os valores mínimos são valores de nível mínimo. A existência desses valores depende do sinal do coeficiente a para as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a > 0$, temos um valor mínimo. Se $a < 0$, temos um valor máximo.



Os valores de máximos ou mínimos são dados pelos cálculos do **vértice da parábola** $V(x_V, y_V)$ onde x_V é o $x_{\text{vértice}}$ e y_V é o $y_{\text{vértice}}$.

As coordenadas do vértice de uma parábola $V(x_v, y_V)$ são dadas por

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad e \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a} \quad \textbf{onde} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Em particular, $y_V = f(x_V)$.

Exemplo 3.47 *O lucro $L(x)$ de uma empresa em função do número de peças fabricadas (x) é dado pela função . $L(x) = 200x - x^2$. Qual é o número de peças que essa empresa deve fabricar para obter o lucro máximo?*

a) 25 *b) 100* *c) 200* *d) 1000* *e) 2000*

Resolução 77 *O lucro máximo é obtido quado $x = x_V$. Sendo $a = -1$ e $b = 200$, temos*

$$x_V = -\frac{200}{2 \cdot (-1)} = 100 \quad \textit{peças}$$

Exemplo 3.48 *O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela função $h(x) = -40x^2 + 200x$, com h em metros. A altura máxima atingida, em metros, pelo projétil é*

a) 6,25 *b) 40* *c) 200* *d) 250* *e) 2000*

Resolução 78 *Devemos calcular a altura máxima. A variável que indica a altura é h que cumpre o papel da ordenada dos pontos do gráfico. Isto é, h denota a variável y. Assim, devemos calcular o valor do y_V. Assim,*

$$\Delta = 200^2 - 4 \cdot (-40) \cdot 0 = 20000 \quad \textit{implica que} \quad y_v = -\frac{20000}{4 \cdot (-40)} = 250 \ \textit{metros}$$

3.13.2 Problemas Propostos

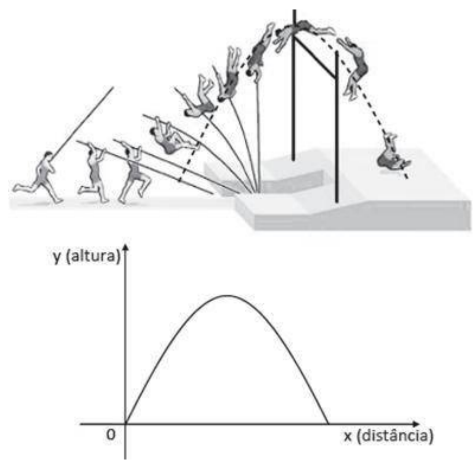
1. Durante a execução de um projeto de Física, um foguete de garrafa pet foi lançado do solo, de modo que a altura f atingida por ele, em relação ao solo, pode ser calculada, em função do tempo x, pela expressão $f(x) = 4,6x - 3x^2$, em que x é dado em segundos e f, em metros. A altura máxima, em metros, que esse foguete atingiu foi de, aproximadamente,

   a) 0,77 b) 1,53 c) 1,76 d) 2,76 e) 4,60

2. A temperatura, em graus centígrados, no interior de uma câmara, é dada por $f(t) = t^2 - 7t + 10$, onde t é medido em minutos. Nessas condições, a temperatura mínima, em ($^{\underline{o}}$C), é:

   a) 2,25 b) 3,5 c) -3,5 d) -2,25 e) 0

3. Um atleta de salto com vara, ao sair do solo, descreve no ar uma curva que tem o formato de um arco de parábola. Desenhada no plano cartesiano, essa curva é descrita pela função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 4x$.

   Qual a altura máxima, em metros, que o atleta atingiu nesse salto?

   a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

4. O lucro de uma fábrica, na venda de determinado produto, é dado pela função $L(x) = -5x^2 + 100x - 80$, onde x representa o número de produtos vendidos e L(x) é o lucro em reais. De acordo com essas informações qual o lucro máximo, em reais, que a fábrica pode obter na venda desses produtos?
a) 80 b) 185 c) 420 d) 500 e) 8400

5. Em uma partida de futebol um goleiro chuta uma bola e sua trajetória descreve uma parábola de equação $h(x) = 16x - 2x^2$, onde $h(x)$ representa a altura atingida pela bola dada em metros, e x a distância horizontal, também dada em metros. Nessas condições, a altura máxima, em metros, atingida pela bola é
a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

6. A variação da temperatura de uma cidade durante um dia de inverno foi registrada por um instituto meteorológico. As temperaturas (T) em graus Celsius, registradas em função da hora (h), de 7h às 15h nesse dia, podem ser encontradas através da função $T(h) = h^2 - 22h + 85$. Nesse dia, qual foi a temperatura mínima, em °C, registrada nessa cidade?
a) -5 b) -11 c) -17 d) -22 e) -36

7. Uma pedra é atirada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por uma parábola. A altura da pedra é dada por $h(t) = -2t^2 + 12t$, em que h é a altura após t segundos do lançamento. O instante em que a pedra atingiu a altura máxima foi aos
a) 3 s b) 6 s c) 12 s d) 18 s e) 36 s

8. Para economizar energia, um supermercado desliga uma câmara fria por algumas horas e depois a religa, de forma que entre meia noite (0 hora) e seis horas da manhã, a temperatura (T), em graus Celsius, em função do tempo (t), em horas, é controlada e varia de acordo com a expressão $T(t) = -t^2 + 5t + 6$, cujo gráfico está representado abaixo. A temperatura (T) é máxima para o tempo (t), em horas, igual a
a) 2,5 b) 3 c) 5 d) 12 e) 12,25

9. Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $y = -3x^2 - 36x$, sendo y a altura e x o deslocamento ao longo da horizontal, em metros, as coordenadas da bola (x, y) no momento em que a velocidade se anula
a) (12,0) b) (6,72) c) (8,96) d) (9,81) e) (72,6)

10. Após várias experiências em laboratório, observou-se que a concentração de certo antibiótico, no sangue de cobaias, varia de acordo com a função $y = 12x - 2x^2$, em que x é o tempo decorrido, em horas, após a ingestão do antibiótico.

Nessas condições, determine o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias.

3.14 Descritor D_{26} - Teoria e Problemas

Neste descritor iremos estabelecer uma relação entre as raízes de um polinômio e a forma fatorada do polinômio. A teoria envolta nos polinômios é densa. Iremos focar na habilidade cobrada por este descritor, sem prejuízos teóricos sobre o tema.

3.14.1 A conexão entre as raízes reais de um polinômio e sua forma fatorada

Um polinômio é uma função que pode ser escrita na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

onde $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0$ são números reais chamados de **coeficientes**. O número natural n é o grau do polinômio, desde que $a_n \neq 0$. Cada expressão a_kx^k com $0 \leq k \leq n$ é chamado de **monômios**. Os polinômios são funções, também chamadas de **funções polinomiais**. Já estudamos neste livro, descritores relacionados as funções afins e quadráticas

$$f(x) = ax + b \quad \text{e} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

Tais funções, são polinômios de grau 1 e 2, respectivamente.

Exemplo 3.49

- $q(x) = 5x^3 - 6x + 1$ *é um polinômio de grau 3.*
  - *Dizemos que q é um polinômio incompleto, pois o coeficiente do monômio de grau 2 é zero.*
- $s(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 2$ *é um polinômio de grau 4.*
  - *O polinômio s é completo, pois os coeficientes dos monômios de grau menor do que 4 são não nulos.*
- $t(x) = 4x^2 - 5x + 1 - 2x^{-3}$, *não é um polinômio devido o termo $2x^{-3}$.*
  - *Os monômios devem possui grau natural.*

Uma raiz real ou zero real de uma função polinomial, ou polinômio,

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

com $a_n \neq 0$ é um número real z tal que $p(z) = 0$.

Exemplo 3.50 *Verifique que 1 e 2 são raízes do polinômio* $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Resolução 79 *Devemos calcular o valor numérico de* $g(1)$ *e* $g(2)$.

$$g(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^2 + 4 = 1 - 5 + 4 = -4 + 4 = 0 \quad \textit{1 é raiz de } g(x)$$

e

$$g(2) = 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 4 = 16 - 5 \cdot 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0 \quad \textit{2 é raiz de } g(x)$$

Agora, vamos apresentar um resultado forte da álgebra. Aqui, tal teorema será apresentado para polinômios que admite todas raízes reais. É bom ressaltar que o teorema a seguir é apresentado depois que já conhecemos sobre raízes complexas de um polinômio.

Teorema 3.51 TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO: *Todo polinômio* $p(x)$ *de grau* $n \geq 1$ *pode ser fatorado como o produto de* n *- fatores de grau 1 com coeficientes complexos.*

O Teorema de Decomposição diz que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

possui as raízes $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, então

$$p(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdots (x - x_n)$$

Essa última expressão é chamada de **forma fatorada de** $p(x)$.

- As raízes de $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ são $\frac{1}{3}$, 2 *e* -2, então

$$p(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2)(x + 2)$$

- Evidentemente que a forma fatorada de $p(x)$ e o polinômio $p(x)$ devem conter as mesmas raízes.

Exemplo 3.52 *Observe o polinômio representado no quadro abaixo.*

$$p(x) = x \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$$

Quais são as raízes desse polinômio?

a) – 6, – 1 e 1.

b) – 3, 0 e 2.

c) – 3 e 2.

d) – 2 e 3.

e) – 2, 0 e 3.

Resolução 80 *Uma vez que uma raiz real de $p(x)$ é um número real ao qual anula o polinômio. Buscamos resolver a equação $p(x) = 0$, ao qual é equivalente a*

$$x \cdot (x-3) \cdot (x+2) = 0$$

Isso implica em três possibilidades para o produto ser igual a zero.

$$\underbrace{x = 0 \quad x - 3 = 0 \quad e \quad x + 2 = 0}_{\textit{As raizes de } p(x) \textit{ são as raízes dos fatores de } p(x)}$$

Portanto, obtemos, resolvendo cada uma das equações acima, como raízes de $p(x)$, $\{0, 3, -2\}$.

Exemplo 3.53 *Decompondo o polinômio $p(x) = 5x^2 + 5x - 30$ em fatores do 1º grau, obtém-se:*
a) $5(x-5) \cdot (x-3)$
b) $5(x-2) \cdot (x+3)$
c) $5(x+2) \cdot (x-3)$
d) $5(x-2) \cdot (x-3)$
e) $5(x+5) \cdot (x+3)$

Resolução 81 *Devemos encontrar as raízes de $p(x)$. Para isso, resolveremos a equação $p(x) = 0$.*

$$\underbrace{5x^2 + 5x - 30}_{\textit{colocar 5 em evidência}} = 0 \quad \textit{implica} \quad 5(x^2 + x - 6) = 0$$

Desta forma, resolvemos a equação

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Usando a fórmula de Bhaskara, temos os coeficientes $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \textit{implica que} \quad \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

e

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{25}}{2a} \quad \textit{implica que} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \to x' = 2 \quad e \quad x'' = -3$$

Como a forma fatorada é dada por

$$p(x) = a_2(x - x')(x - x'')$$

onde a_2 é o coeficiente dominante de $p(x)$, neste caso $a_2 = 5$ ($p(x) = 5x^2 + 5x - 30$). Desta forma, obtemos a forma fatorada

$$p(x) = 5(x-2)(x+3)$$

3.14.2 Problemas Propostos

1. As raízes do polinômio $p(x) = (x-3)\cdot(x+1)$ são:

   a) –2 e 1. b) 3 e –1. c) –3 e 1. d) 3 e 1. e) –3 e –1.

2. Um polinômio $p(x)$ de terceiro grau tem raízes iguais a - 3, 2 e 4. Das expressões abaixo a que pode representar $p(x)$ é:

   a) $(x-3)(x+2)(x+4)$

   b) $(x+3)(x-2)(x-4)$

   c) $(x+3)(x+2)(x+4)$

   d) $(x-3)(x-2)(x-4)$

   e) $(x-3)(x-2)(x+4)$

3. Fatorando-se $x^2 + 6x + 9$, obtém-se:

   a) $(x+9)^2$

   b) $(x+3)^2$

   c) $(x+3)(x-3)$

   d) $(x-3)^2$

   e) $(x-3)(x-2)$

4. Quais são as raízes da equação $2x(3x^2 - 27) = 0$?

   a) – 2, 0 e – 3.

   b) – 2, 0 e 3.

   c) – 3, 0 e 3.

   d) – 3, 2 e 3.

   e) – 3, – 2 e 3.

5. Considere a forma fatorada do polinômio p(x) representado abaixo.

   $$p(x) = x(x-1)(x-2)^2(x+3)$$

   Quais são as raízes desse polinômio? a) – 3, 0, 1, e 2.

   b) – 3, 1 e 2.

   c) – 3, 1 e 4.

   d) – 2, – 1, e 3.

   e) – 1, 0, 3 e 4.

6. A forma fatorada de um polinômio é dada por

$$p(x) = -4(x-2)(x-3)(x+5).$$

   As raízes desse polinômio são

   a) – 5, 2 e 3.

   b) – 4, – 3, – 2 e 5.

   c) – 3, – 2 e 5.

   d) 2, 3 e 5.

   e) 2, 3, 4 e 5.

7. O polinômio $p(x) = (x+2)(x-3)(x-1)$ se anula para

   a) x = – 2, x = 3 ou x = – 1.

   b) x = 2, x = – 3 ou x = – 1.

   c) x = – 2, x = 3 ou x = 1.

   d) x = 2, x = 3 ou x = 1.

   e) x = – 2, x = – 3 ou x = – 1.

8. Considere o polinômio $A(x) = x^2 + 2x - 255$, a decomposição deste polinômio é:

   a) $(x-17)(x+15)$

   b) $(x+17)(x+15)$

   c) $(x+17)(x-15)$

   d) $(x-17)(x-15)$

   e) $(x-15)^2$

3.15 Descritor D_{27} - Teoria e Problemas

O descritor D_{27} está relacionado a relacionar a representação algébrica a representação gráfica e a representação gráfica a representação algébrica de um a função exponencial. Vamos fazer um tratamento do estudo de funções exponenciais e seus respectivos gráficos.

3.15.1 Funções Exponenciais

Relembremos aqui que uma função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é uma **função exponencial** se a sua lei de formação é da forma

$$f(x) = a^x$$

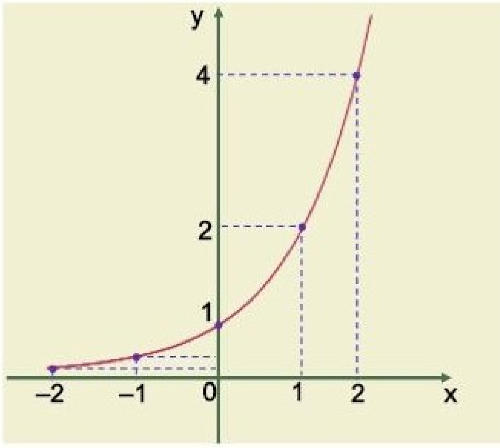
onde $a > 0$ e $a \neq 1$. O termo a é chamado de base da função exponencial. O domínio dessas funções são sempre o conjunto dos números reais $\mathbf{R}$ e a imagem $Im(f) = \{y \in \mathbf{R} : y > 0\} = \mathbf{R}_+$.

Vejamos alguns exemplos de funções exponenciais

Exemplo 3.54 *No plano cartesiano abaixo está representado o gráfico da função exponencial* $f(x) = 2^x$*, onde* $a = 2$ *(base 2).*

x	$y = 2^x$
−2	¼
−1	½
0	1
1	2
2	4

$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}_+^*$

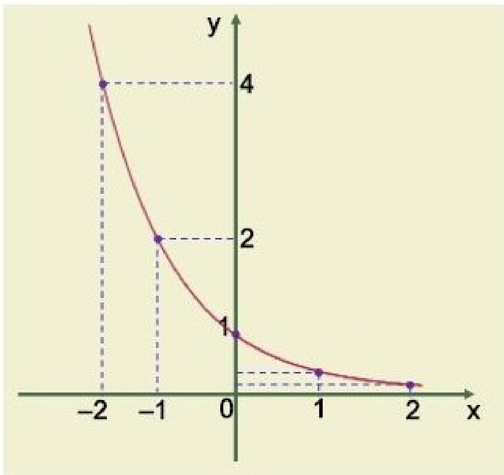


Usando os conhecimentos discutidos no descritor D_{20} *temos que a função* $f(x) = 2^x$ *é crescente.*

Exemplo 3.55 *No plano cartesiano abaixo está representado o gráfico da função exponencial* $f(x) = (1/2)^x$*, onde* $a = 2$ *(base 2).*

x	$y = (1/2)^x$
−2	4
−1	2
0	1
1	½
2	¼

$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}_+^*$

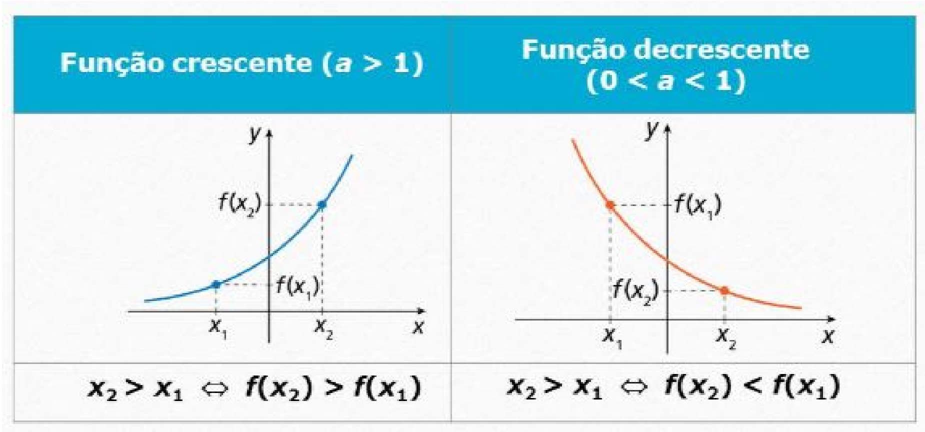


Usando os conhecimentos discutidos no descritor D_{20} *temos que a função* $f(x) = (1/2)^x$ *é decrescente. Note que* $(1/2)^x = 2^{-x}$ *(aqui foi usado que* $2^{-1} = 1/2$*.)*

Os exemplos acima acende uma discussão: Quando que uma função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente ou decrescente? De fato, olhando que a condição de existência da função exponencial está vinculada a base $a > 0$ e $a \neq 1$. Assim, podemos notar que $a = 1$ é uma singularidade. Desta forma:

- Se $a > 1$, então $f(x) = a^x$ é crescente.

- Se $0 < a < 1$, então $f(x) = a^x$ é decrescente.

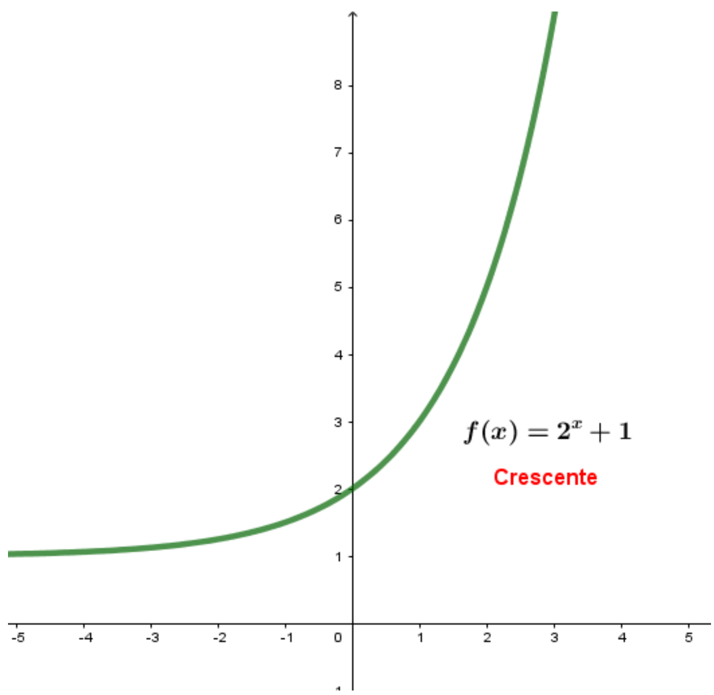


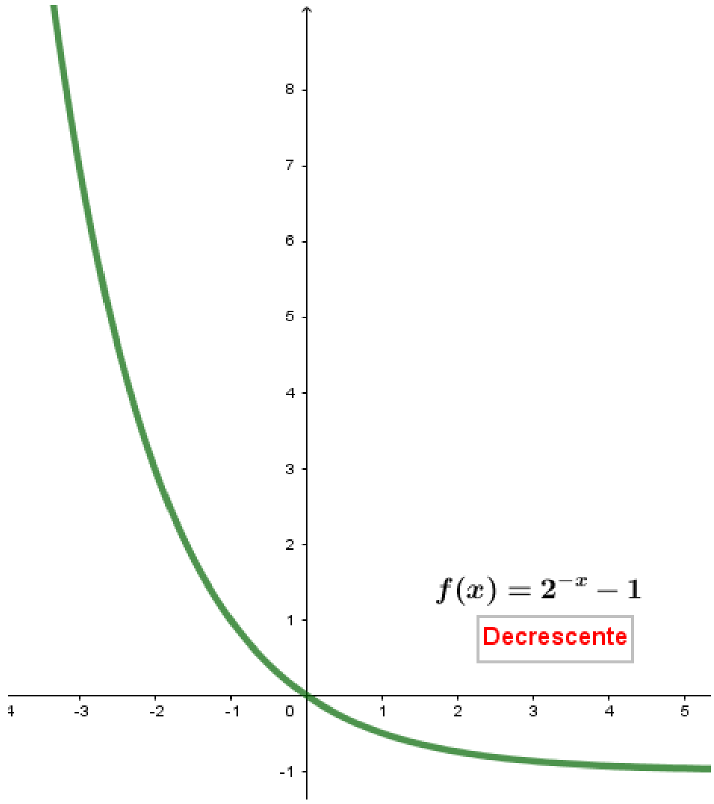
É bom enfatizar que independente da função exponencial $f(x) = a^x$ seja crescente ou decrescente, $f(0) = 1$. Isto é, toda função exponencial corta o eixo y no valor 1.

Podemos destacar algumas funções que não são exponenciais, mas em boa parte da literatura são apresentadas como funções exponenciais. A esta classe de funções, nomeamos de **funções quase-exponenciais**. Vamos discutir um pouco sobre essas funções e seus gráficos.

Funções da forma $f(x) = a^x + b$

Essas funções são formadas pela soma de uma exponencial a^x a uma constante b. Os gráficos dessas funções obedecem o crescimento e decrescimento para funções exponenciais a^x. O domínio das funções $f(x) = a^x + b$ é o conjunto dos números reais. A imagem é o conjunto $\{y \in \mathbf{R} : y > b\}$. É importante destacar que se $b < 0$ então o gráfico de $f(x) = a^x + b$ passa para parte negativa do eixo y. Além do mais, essas funções cortam o eixo y no valor $b + 1$.

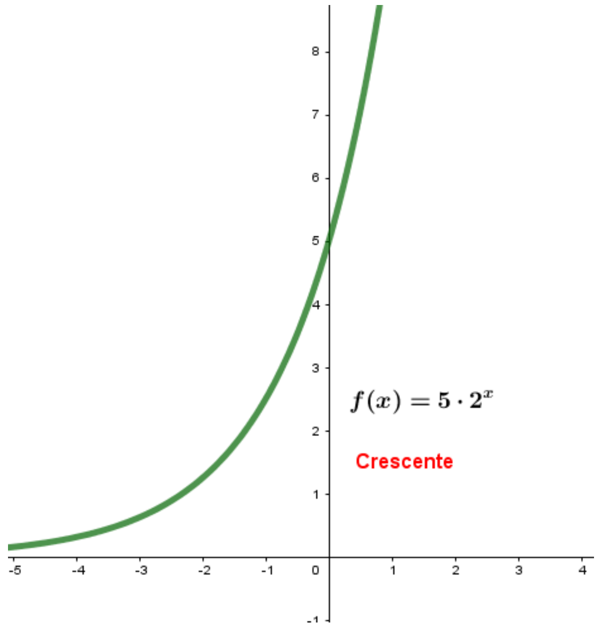




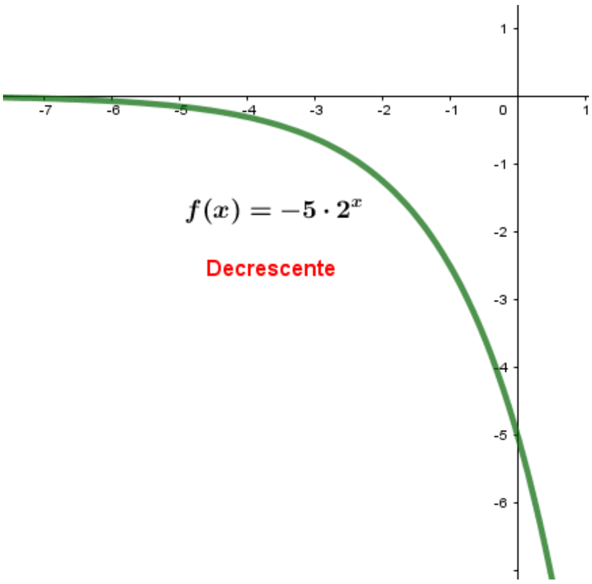
Os gráficos das funções acimam cortam o eixo y no valor 0.

Funções da forma $f(x) = K \cdot a^x$

Essas funções são formadas pelo produto de uma constante K por uma função exponencial a^x. Para essas funções, enfatizamos que Quando k é positivo, o crescimento e decrescimento dessas funções seguem o crescimento e decrescimento das funções $f(x) = a^x$. Agora se K é negativo, então $f(x) = K \cdot a^x$ é crescente se $0 < a < 1$ e decrescente para $a > 1$.



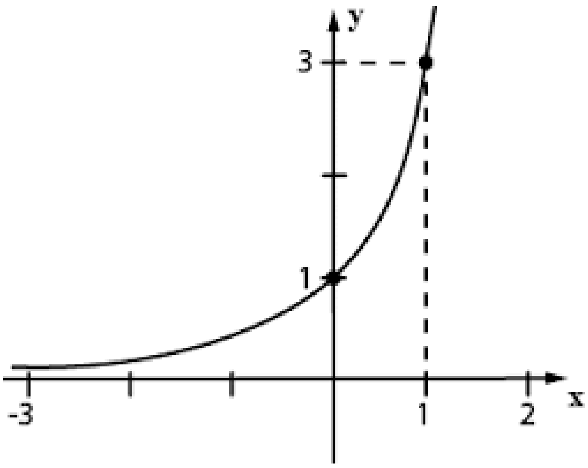
Corta o eixo y no valor 5



Corta o eixo y no valor - 5

Para finalizar o estudo dessas funções, faremos um exemplo noa qual exploramos a necessidade de olhar o gráfico de uma função exponencial e obter a lei de formação dessa função.

Exemplo 3.56 *Qual a lei de formação da função dada no gráfico abaixo?*



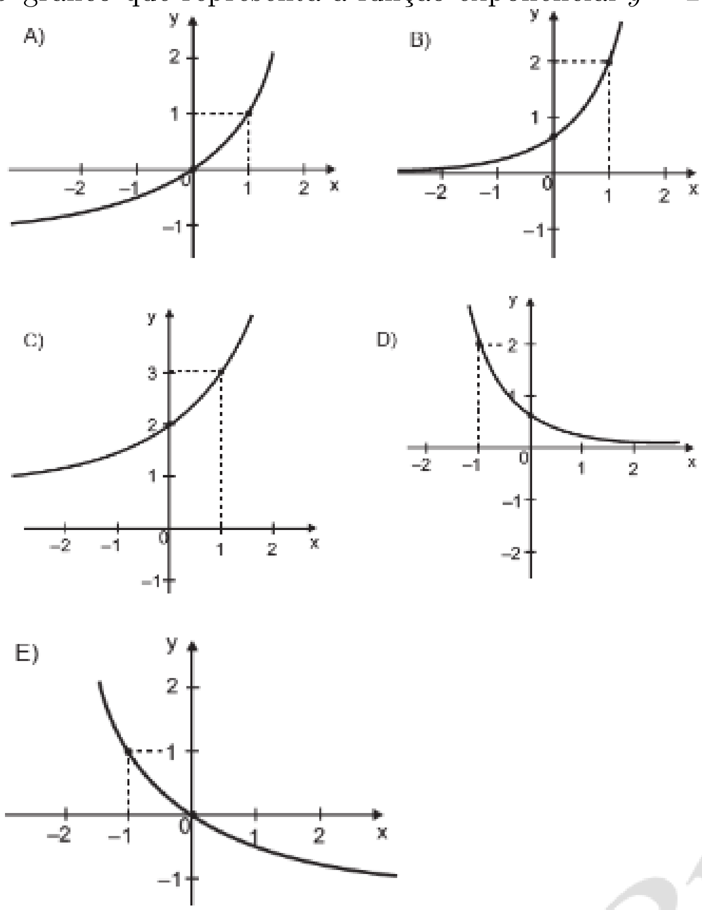
Resolução 82 *Observamos que estamos tratando de uma função da forma* $f(x) = a^x$ *(corta o eixo y no valor 1). Note que o gráfico da função passa pelo ponto* $(1, 3)$*, isto é* $f(1) = 3$*. Portanto, sendo* $3 = f(1) = a^1 = a$*, temos que a base é 3. Logo,* $f(x) = 3^x$*.*

Para dizer qual a lei de formação de uma função exponencial dado o gráfico é importante observar alguns aspectos do gráfico:

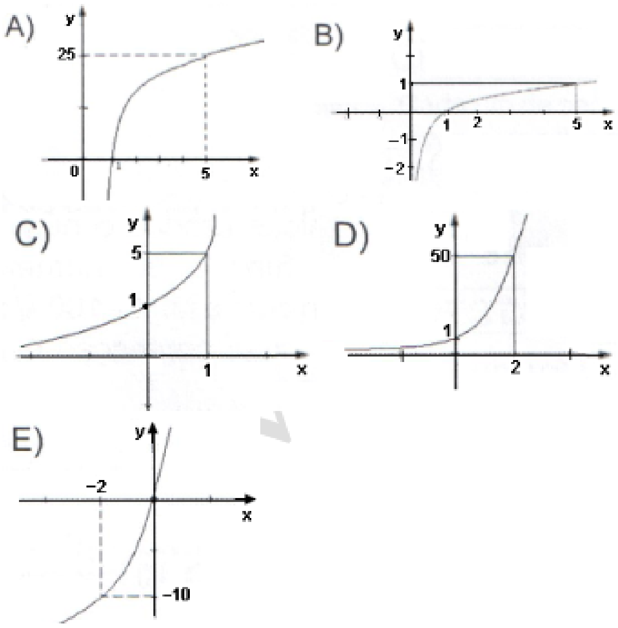
- Crescente ou decrescente;
- Corta o eixo y no valor 1 (função do tipo a^x);
- Caso a função não corte o eixo y no valor 1, testar funções da forma $a^x + b$ ou $K \cdot a^x$.

3.15.2 Problemas Propostos

1. O gráfico que representa a função exponencial $y = 2^x - 1$ é dado no item:



2. O gráfico que pode representar a função $y = 5^x$ é



3. Abaixo estão relacionadas algumas funções. Entre elas, a função exponencial

crescente é:

a) $f(x) = 5^{-x}$

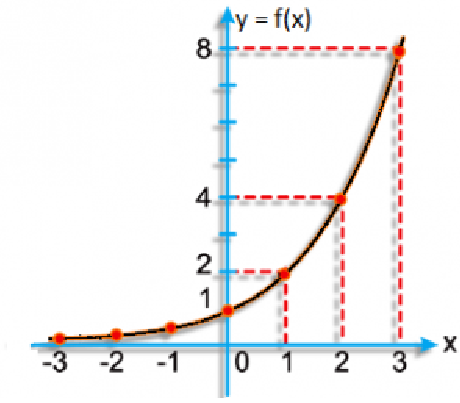
b) $f(x) = (\sqrt{3})^2$

c) $f(x) = 0,1^x$

d) $f(x) = (3/2)^x$

e) $f(x) = 5x$

4. No gráfico abaixo está representada uma função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.



Qual dos itens abaixo apresenta a lei de formação dessa função?

a) $f(x) = 2^{-x}$

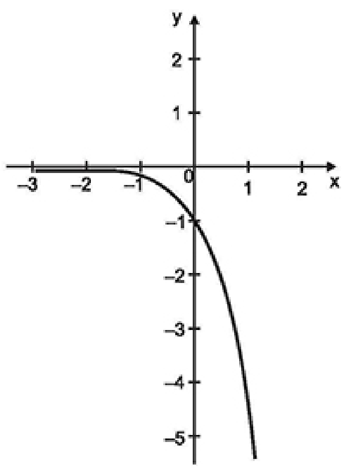
b) $f(x) = 2 \cdot 3^x - 1$

c) $f(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = 2^x$

e) $f(x) = 3^x$

5. Considere o gráfico da função abaixo



Qual dos itens abaixo apresenta a lei de formação dessa função?

a) $f(x) = 2^{-x}$

b) $f(x) = 3^x - 1$

c) $f(x) = -4^x$

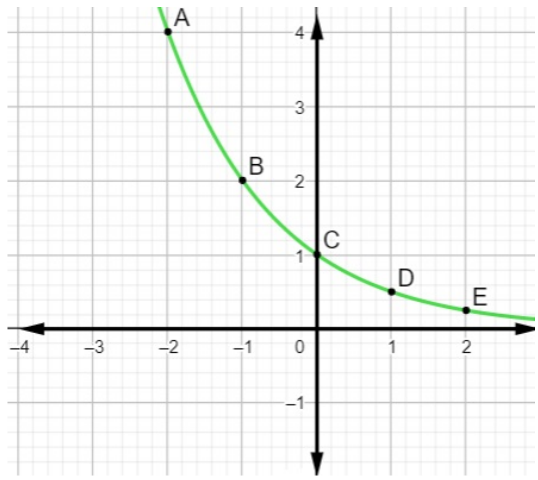
d) $f(x) = 2^x$

e) $f(x) = -3^{-x}$

6. Dada a função exponencial $f(x) = (k-4)^x$, sabendo que essa função é decrescente, o valor de k está entre:

a) 1 e 2 b) 2 e 3 c) 3 e 4 d) 4 e 5 e) 5 e 6

7. O gráfico, a seguir, é a representação de uma função exponencial:



Qual dos itens abaixo apresenta a lei de formação dessa função?

a) $f(x) = 5^x$

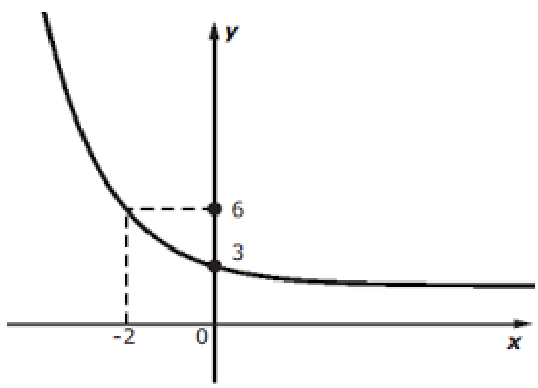
b) $f(x) = 0,2^x$

c) $f(x) = 0,5^x$

d) $f(x) = 2^x$

e) $f(x) = 0,5^{-x}$

8. A figura mostra um esboço do gráfico da função $f(x) = a^x + b$, com a e b números reais, $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$.



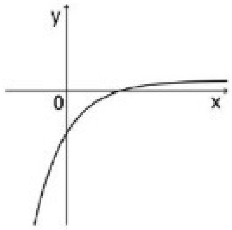
Desenho Ilustrativo Fora de Escala

Então o valor de $f(2) - f(-2)$ é igual a:

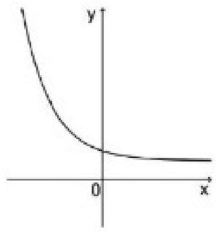
a) $-\frac{3}{4}$ b) $-\frac{15}{4}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $-\frac{7}{6}$ e) $-\frac{35}{6}$

9. Considere a função f definida por $f(x) = 15 \cdot 0,7x$ e representada em um sistema de coordenadas cartesianas. Entre os gráficos abaixo, o que pode representar a função f é:

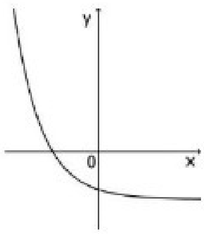
A)



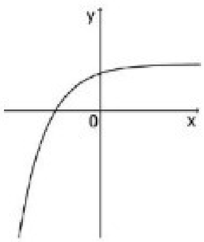
B)



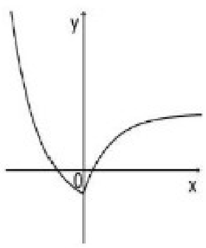
C)



D)



E)



10. Quais dos itens abaixo apresenta duas funções exponenciais decrescente?

a) $f(x) = 2^{-x},\ g(x)4^{x}$

b) $f(x) = (\sqrt{2})^{x},\ g(x) = 7^{-x}$

c) $f(x) = -5x,\ g(x) = (0,5)^{x}$

d) $f(x) = (0,5)^{-x}, \; g(x) = (\sqrt{0,9})^x$

e) $f(x) = 5^{-x}, \; g(x) = (\sqrt[4]{0,16})^x$

3.16 Descritor D_{28} - Teoria e Problemas

Neste descritor vamos tratar das funções logarítmicas no objetivo de olhar essa classe de funções como funções inversas da função exponencial. Vamos repassar por uma breve revisão dos logaritmos antes de apresentar o enfoque principal deste descritor.

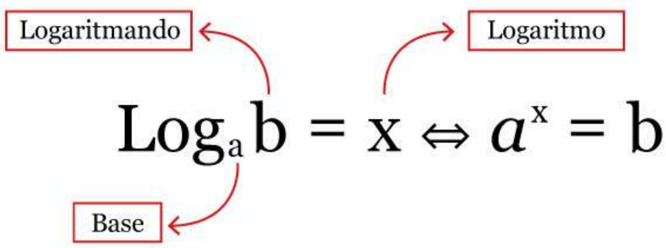
3.16.1 Logaritmos e Funções Logarítmicas

Os logaritmos são expressões matemáticas de grande utilidade em áreas como matemática financeira, crescimento populacional, convergência de métodos discretos e etc. Veremos por meio da definição abaixo que existe uma relação direta entre as exponenciais (de modo mais particular, equações exponenciais) e os logaritmos.

Sejam a, b e x números reais tais que $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Definimos o logaritmo de a na base b como um número real x dado pela relação

$$\underbrace{\log_b a = x}_{\textbf{Logaritmo de a na base b}} \qquad \text{se, e somente se} \qquad \underbrace{b^x = a}_{\textbf{equação exponencial}} \tag{3.1}$$

Os números reais a, b e x recebem nomes especiais que são identificados abaixo:



A relação dada em (3.1) nos diz que para calcular o valor de um logaritmo resolvemos uma equação exponencial. Isto é, o valor que procuramos é um expoente de uma equação.

Exemplo 3.57 *Qual o valor de* $\log_5 625$*?*

Resolução 83 *Para calcular o valor de um logaritmo, devemos fatorar o logaritmando na mesma base do logaritmo. Ou seja, fatoramos 625 na base 5. Isto é devido ao fato* *de que devemos resolver a equação exponencial*

$$5^x = 625 \quad \textit{onde } x \textit{ é o valor do logaritmo}$$

Fatorando 625, obtemos $625 = 5^4$. *Desta forma*

$$5^x = 5^4 \quad \textit{como as bases são iguais} \quad x = 4$$

Portanto, $\log_5 625 = 4$.

O cálculo de logaritmos faz uso de várias propriedades básicas e por isso é vistas como um tema difícil por boa parte dos estudantes. Vejamos algumas das propriedades, relacionadas a potência, que necessitaremos:

	Algumas Propriedades	
Produto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Quociente	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
Radicais	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Exemplo 3.58 *Calcule o valor de* $\log_{\sqrt{3}} 81$.

Resolução 84 *Usando a definição (3.1), temos que encontrar um valor* x *tal que* $\sqrt{3}^x = 81$. *Aqui, fatorar somente o 81 não adianta, devemos manipular a base* $\sqrt{3}$. *Assim, usamos a propriedade dos radicais e escrevemos* $\sqrt{3} = 3^{1/2}$. *Como* $81 = 3^4$, *temos*

$$\sqrt{3}^x = 81 \quad \textit{equivale} \quad (3^{\frac{1}{2}})^x = 3^4$$

Usando a propriedade de potências, temos

$$\underbrace{3^{\frac{x}{2}} = 3^4}_{\textbf{igualando os expoentes}} \qquad \textit{obtemos} \quad \frac{x}{2} = 4 \quad \textit{implica que} \quad x = 8$$

Assim, $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$.

3.16.2 Problemas Propostos

1. Qual o valor de $\log_7 343$?
   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

2. Qual o valor de $\log_{\sqrt[5]{2}} 1024$?
   a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

3. Qual o valor de $\log_3 \frac{1}{243}$?

   a) 1 b) -2 c) 5 d) 5 e) -5

4. Qual o valor de $\log_{0,5} 2$?

   a) -1 b) 1 c) 2 d) -2 e) 0

5. Qual o valor de $\log_{0,4}\left(\frac{8}{125}\right)$?

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

6. O valor da expressão $\log_2 64 - \log_3 27$ é igual á:

   a) 3 b) 13 c) 17 d) 31 e) 40

7. Simplificando

$$\frac{2^6}{\log_3 81}$$

   obtemos

   a) 16 b) 12 c) 7 d) 8 e) 4

3.16.3 Propriedades do Logaritmos

Nesta seção vamos apresentar algumas propriedades básicas de logaritmos. Primeiramente, vamos definir um logaritmo de base especial. Os logaritmos de base 10.

- **Os logaritmos de base 10 são os $\log_{10} a$. Para esses logaritmos podemos simplesmente representar por $\log a$. A base omitida indica que o logaritmo é de base 10.**

Quando não conseguimos escrever logaritmando e base como potências de mesma base, necessitamos de propriedades que nos auxiliam na resolução de problemas. Vamos apresentar essas propriedades.

Sejam x, y números reais positivos, $b > 0$ e $b \neq 1$. Então:

- **REGRA DO PRODUTO:**

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

- **REGRA DO QUOCIENTE:**

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

- **REGRA DA POTÊNCIA:**

$$\log_b x^n = n \cdot \log_b x \quad \text{para todo natural n}$$

- **LOGARITMANDO E BASE IGUAIS :**

$$log_b b = 1$$

Existem mais propriedades dos logaritmos. Tendo em vista o objetivo deste material, não as exploraremos aqui.

Exemplo 3.59 *Usando* $\log 2 \approx 0,3$, *calcule* $\log 16$*:*

Resolução 85 *Observe que calcular* $\log 16$ *é diferente de calcular* $\log_2 16$*. A questão de estarmos na base 10 e 16 não ser fatorado nessa base, nos impede de aplicar a regra (3.1). Assim, a estratégia a ser adquirida aqui consiste em fatorar o logaritmando 16 e usar a regra da potência,*

$$\log 16 = \log 2^4 = \underbrace{4 \times \log 2}_{\textbf{regra da potência}} = 4 \times 0,3 = 1,2$$

Exemplo 3.60 *Sabendo que* $\log 2 \approx 0,3$ *e* $\log 3 \approx 0,48$*, calcule o valor de* $\log 108$*.*

Resolução 86 *Fatorando 108, obtemos que* $108 = 2^2 \times 3^3$*. Usando a regra do produto e a regra da potência*

$$\log 108 = \log 2^2 \times 3^3 = \log 2^2 + \log 3^3 = 2\log 2 + 3\log 3 = 2 \times 0,3 + 3 \times 0,48 = 2,04$$

Exemplo 3.61 *Sabendo que* $\log 2 \approx 0,3$ *e* $\log 3 \approx 0,48$*, calcule o valor de* $\log\left(\frac{27}{5}\right)$*.*

Resolução 87 *Usando a regra do quociente, temos*

$$\log\left(\frac{27}{5}\right) = \log 27 - \underbrace{\log 5}_{\log 5 = \log \frac{10}{2} = 0,7} = 3 \times \log 3 - 0,7 = 1,46 - 0,7 = 0,76$$

3.16.4 Problemas Propostos

1. Se $\log_2 b - \log_2 a = 5$, qual o valor do quociente $\frac{b}{a}$?
   a) 10 b) 25 c) 32 d) 64 e) 128

2. Sabendo que $\log 2 \approx 0,3$ e $\log 3 \approx 0,48$, Qual o valor de $\log 96$?
   a) 1,90 b) 1,92 c) 1,96 d) 1,98 e) 2,0

3. A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Ricther, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:
$$M_W = -10,7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$$
   Onde M_0 é o movimento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o $dina \cdot cm$.

   O terremo de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$. Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em $dina \cdot cm$)?
   a) $10^{-5,10}$ b) $10^{-0,73}$ c) $10^{12,00}$ d) $10^{21,65}$ e) $10^{27,00}$

4. Em março de 2011, um terremoto de 9,0 graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida pela escala Richter, é $R = \log(A/A_0)$, em que A é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo, A_0 é uma amplitude de referência e log representa o logaritmo na base 10. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado). A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é
   a) 1,28 b) 2,0 c) $10^{\frac{9}{7}}$ d) 100 e) $10^9 - 10^7$

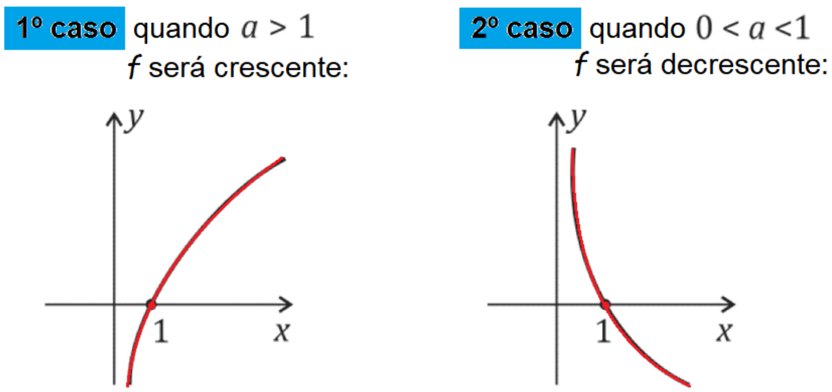
5. Se $\log_4(x+2) + \log_2(x+2) = 3$, o valor de x é igual á:
   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

3.16.5 Funções Logarítmica e sua Relação com a Função Exponencial

A **função logarítmica** possui uma boa relação com as funções exponenciais. Uma se comporta (com devidos ajustes de base) como a inversa da outra. Primeiramente,

Dado um número real $a > 0$ e $a \neq 1$, a função logarítmica de base a, $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ indicada por $f(x) = \log_a x$ e satisfaz as propriedades

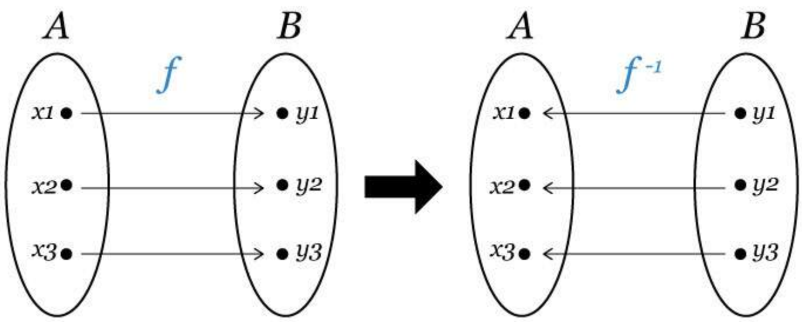
- **$f(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1$;**
- **$f(x) = 1$ se, e somente se, $x = a$;**
- **Se $0 < b < 1$, então f é decrescente;**
- **Se $b > 1$, então f é crescente.**



O nosso intuito é mostrar a relação entre as funções logarítmicas e as funções exponenciais. Assim, dada uma função $f : E \to F$ onde E, F são subconjuntos dos números reais $\mathbf{R}$, Dizemos que f admite uma inversa local se existem um subconjunto $A \subset E$ e uma função $g : B \to A$ tal que

- $f(A) = B$
- $f(g(x)) = x$ para todo $x \in B$
- $g(f(y)) = y$ para todo $y \in A$

Dizemos que g é a inversa local da função f e a denotamos por f^{-1}, isto é, $g = f^{-1}$.



O diagrama acima mostra que enquanto a função f leva x em y, a função inversa f^{-1} leva y em x. De modo informal, podemos dizer que x e y, enquanto variáveis que denotam domínio e imagem de uma função, trocam de papel, isto é, x ocupa o lugar de y e y ocupa o lugar de x.

No que segue, focaremos em verificar que as funções exponenciais e logarítmicas conversam muito bem como uma sendo a inversa da outra.

Exemplo 3.62 *Consideremos a função $f(x) = a^x$ (uma função exponencial), onde $a > 0$ e $a \neq 1$. Por conveniência gráfica, podemos escrever $y = f(x)$ e obtemos*

$$y = a^x$$

Agora, vamos trocar x com y na equação. Isto é, fazemos x virar y e y virar x.

$$x = a^y$$

O nosso próximo passo é isolar a variável y, para isso vamos aplicar o logaritmo na base a, de ambos os lados da igualdade acima e usar a regra da potência

$$\underbrace{\log_a(x) = \log_a a^y}_{\textit{Usamos a regra da potência}}$$

$$\log_a(x) = y \cdot \log_a a$$

Usamos que $\log_a a = 1$ e obtemos

$$y = \log_a(x)$$

Assim, a função inversa da exponencial $f(x) = a^x$ é a função $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. É claro que $f(x) = a^x$ é a inversa da função $\log_a(x)$.

Exemplo 3.63 *Consideremos a função $f(x) = a^x + b$ (uma função quase exponencial), onde $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b \in \mathbf{R}$ Por conveniência gráfica, podemos escrever $y = f(x)$ e obtemos*

$$y = a^x + b$$

Agora, vamos trocar x com y na equação. Isto é, fazemos x virar y e y virar x.

$$x = a^y + b$$

O nosso próximo passo é isolar a variável y, para isso vamos primeiramente isolar o termo a^y e aplicar o logaritmo na base a, de ambos os lados da igualdade acima afim *de usar a regra da potência*

$$x - b = a^y$$

$$\underbrace{\log_a(x-b) = \log_a a^y}_{\textit{Usamos a regra da potência}}$$

$$\log_a(x-b) = y \cdot \log_a a$$

Usamos que $\log_a a = 1$ *e obtemos*

$$y = \log_a(x-b)$$

Assim, a função inversa da exponencial $f(x) = a^x + b$ *é a função* $f^{-1}(x) = \log_a(x-b)$ *ao qual está definida para* $x > b$. *É claro que* $f(x) = a^x + b$ *é a inversa local da função* $\log_a(x-b)$.

Exemplo 3.64 *Consideremos a função* $f(x) = a^{x-b}$ *(uma função quase exponencial), onde* $a > 0$, $a \neq 1$ $b \in \mathbf{R}$. *Por conveniência gráfica, podemos escrever* $y = f(x)$ *e obtemos*

$$y = a^{x-b}$$

Agora, vamos trocar x *com* y *na equação. Isto é, fazemos* x *virar* y *e* y *virar* x.

$$x = a^{y-b}$$

O nosso próximo passo é isolar a variável y, *para isso vamos aplicar o logaritmo na base* a, *de ambos os lados da igualdade acima e usar a regra da potência*

$$\underbrace{\log_a(x) = \log_a a^{y-b}}_{\textit{Usamos a regra da potência}}$$

$$\log_a(x) = (y-b) \cdot \log_a a$$

Usamos que $\log_a a = 1$ *e obtemos*

$$y = \log_a(x) + b$$

Assim, a função inversa da exponencial $f(x) = a^{x-b}$ *é a função* $f^{-1}(x) = \log_a(x) + b$. *É claro que* $f(x) = a^{x-b}$ *é a inversa da função* $\log_a(x) + b$.

3.16.6 Problemas Propostos

1. Em uma indústria de um determinado metal utilizado em computadores, a sua produção segue a lei $f(x) = 2^{x-1}$, onde $f(x)$ representa a produção do metal e x,

o tempo gasto para a sua produção. O diretor financeiro dessa indústria pediu que seu auxiliar técnico montasse o gráfico da lei inversa da função acima, de modo que pudesse mostrar à diretoria o tempo para determinadas produções. O novo gráfico corresponde à função:

a) $f^{-1}(x) = \log_2(x-1)$

b) $f^{-1}(x) = 1 - \log_2(x-1)$

c) $f^{-1}(x) = 1 - \log_2(x)$

d) $f^{-1}(x) = 1 + \log_2(x)$

e) $f^{-1}(x) = 1 + \log_x(2)$

2. Se a altura de planta dobra a cada mês, durante certo período de sua vida. A função $H(x) = 2^x$ representa esta situação, onde x é a altura da planta . Um botânico fez um gráfico da lei inversa da função acima, de modo que pudesse mostrar aos seus colegas o desenvolvimento desta planta. O novo gráfico corresponde à função:

a) $f^{-1}(x) = 2 + \log_2(x)$

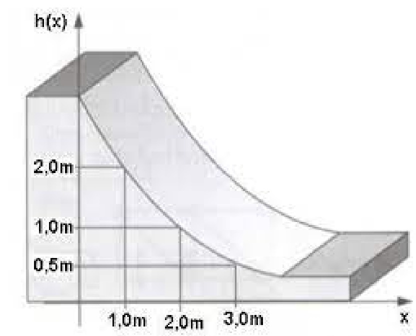
b) $f^{-1}(x) = 1 - \log_x(2)$

c) $f^{-1}(x) = \log_2(x)$

d) $f^{-1}(x) = x + \log_2(2)$

e) $f^{-1}(x) = \log_x(2)$

3. Uma rampa para manobras de skate de campeonato mundial é representada pelo esquema abaixo:



A parte da curva está associada a função $h(x) = (0,5)^{x-2}$. Um representante da organização da prova pediu que seu auxiliar técnico montasse o gráfico da lei inversa da função acima, de modo que pudesse mostrar aos técnicos dos atletas. O novo gráfico corresponde à função:

a) $f^{-1}(x) = 1 + \log_{0,5}(x)$

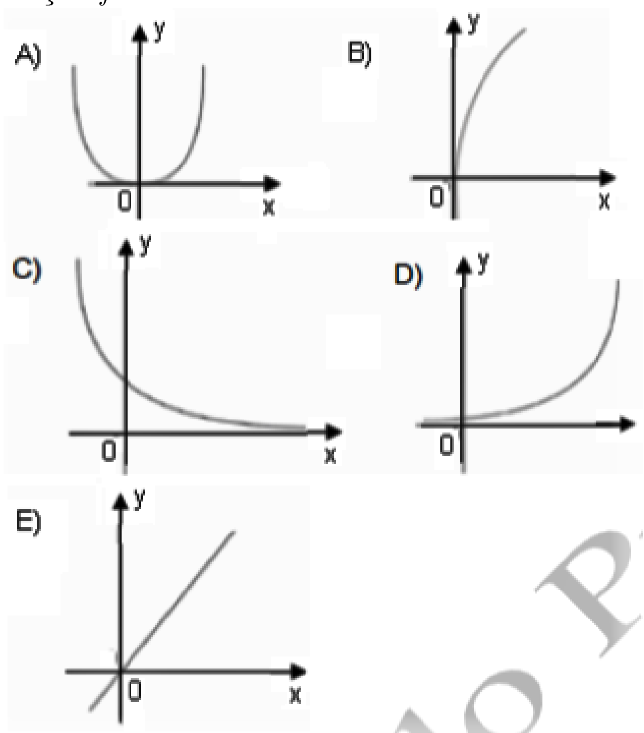
b) $f^{-1}(x) = 2 + \log_{0,5}(x)$

c) $f^{-1}(x) = \log_{0,5}(x)$

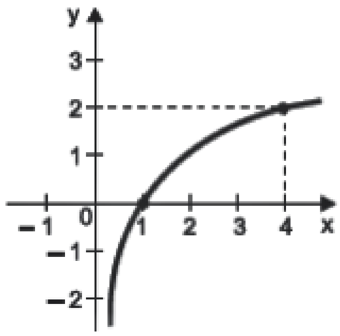
d) $f^{-1}(x) = \log_{0,5}(x-2)$

e) $f^{-1}(x) = \log_x(0,5)$

4. Dada a função $f(x) = 3^x$, qual dos gráficos que melhor representa a inversa da função f?



5. Observe abaixo o gráfico da função $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$



Qual é a lei de formação dessa função?

a) $f(x) = -2\log_2(x)$

b) $f(x) = \log_2(x)$

c) $f(x) = 2\log_2(x)$

d) $f(x) = -2\log_2(x/2)$

e) $f(x) = \log_2(x+1)$

3.17 Descritor D_{29} - Teoria e Problemas

Neste descritor, estaremos resolvendo problemas que envolvam funções exponenciais. Tais problemas estão relacionados as aplicações das funções exponenciais. Relembremos que essas funções modelam boa parte dos problemas de evolução.

3.17.1 Aplicações das funções exponenciais

As funções exponencias são da forma $f(x) = a^x$ onde $a > 0$ e $a \neq 1$. As funções que modelam problemas de evolução possuem o formato

$$f(x) = K \cdot a^b x$$

onde K indica a condição inicial, a é taxa de crescimento ou decrescimento e b é um fator de correção (uma vez que geralmente x denota o tempo). Vejamos essa situação por meio de um exemplo.

Exemplo 3.65 *Uma maionese mal conservada causou mal-estar nos frequentadores de um clube. Uma investigação revelou a presença da bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei:* $n(t) = 200 \cdot 2^{2t}$, *em que* $n(t)$ *é o número de bactérias encontradas na amostra de maionese t horas após o início do almoço. Quando o número de bactérias era de 3200, tinha passado:*
a) 1 hora e 30 minutos.
b) 3 horas.
c) 2 horas e 30 minutos.
d) 1 hora.
e) 2 horas.

Resolução 88 *A função* $n(t) = 200 \cdot 2^{2t}$ *determina o número de bactérias após t horas. O valor* 200 *indica que no tempo* $t = 0$, *ou seja inicialmente, tem - se 200 bactérias. A base* 2 *indica que a quantidade dobra a cada 30 minutos (o fato de ser 30 minutos é devido o expoente ser 2t). Estamos interessados em determinar t de modo que* $n(t) = 3200$. *Isso é equivalente a*

$$200 \cdot 2^{2t} = 3200 \quad \textit{implica que} \quad 2^{2t} = \frac{3200}{200} = 16 = 2^4$$

Portanto, obtemos que $2^{2t} = 2^4$, *pela igualdade das bases, temos* $2t = 4$ *que nos fornece o tempo* $t = 2$ *horas.*

3.17.2 Problemas Propostos

1. Em uma pesquisa realizada, constatou-se que a população A de determinada bactéria cresce segundo a expressão $A(t) = 25 \cdot 2^t$, onde t representa o tempo em horas. Para atingir uma população de 400 bactérias, será necessário um tempo de:

a) 2 horas.
b) 6 horas.
c) 4 horas.
c) 8 horas.
e) 10 horas

2. O número de bactérias Q em certa cultura é uma função do tempo t e é dado por

$$Q(t) = 600 \cdot 3^{2t}$$

onde t é medido em horas. O tempo t para que se tenham 48600 bactérias é:
a) 2 horas.
b) 6 horas.
c) 4 horas.
c) 81 horas.
e) 600 horas

3. Uma plantinha foi levada para um laboratório de botânica para que seu crescimento fosse estudado. Esse crescimento foi então modelado pela função $n(t) = 1+2^t$, em que t é dado em dias e $n(t)$, em cm. Ao final do último dia observação, que a plantinha atingiu a altura de 65 cm. A quantidade de dias em que ela ficou em observação foi:
a) 6 b) 11 c) 32 d) 33 e) 40

4. A lei $P(t) = 100 \cdot (0,5)^t$ representa o percentual de agrotóxico P que age sobre a lavoura ao longo do tempo t, em horas. Qual é o percentual de agrotóxico que age sobre a lavoura em 2 horas?
a) 250 b) 125 c) 100 d) 50 e) 25

5. Estudos indicam que o número N de camarões criados em cativeiro, decorridos x meses, é dado pela fórmula $N(X) = 500 \cdot 2^{0,5x}$. Qual é a quantidade de camarões criados em cativeiro após 10 meses?
a) 1000 b) 2000 c) 3200 d) 5000 e) 16000

6. O crescimento de bactérias em uma cultura obedeceu à função $P(t) = 20 \cdot 2^{t-1}]$ em que $f(t)$ é o número de bactérias e t, o tempo em horas. Qual será o tempo necessário para que o número de bactérias seja igual a 20 480?
a) 8 horas.
b) 9 horas.
c) 10 horas.
d) 11 horas.
e) 12 horas.

7. Suponha que o crescimento de uma cultura de bactérias obedece à lei $N(t) = M \cdot 2^{t/2}$, na qual N representa o número de bactérias no momento t, medido em horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine o número de bactérias depois de 8 horas.

8. A desintegração de uma substância radioativa é um fenômeno químico modelado pela fórmula $q = 10 \cdot 2^{kt}$, onde q representa a quantidade de substância radioativa (em gramas) existente no instante t (em horas). Quando o tempo t é igual a 3,3 horas, a quantidade existente q vale 5. Então, o valor da constante k é
   a) $-33/10$ b) -7 c) $-5/33$ d) $-10/33$ e) $-100/33$

9. Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função: $F(t) = a \cdot 2^{\check{}bt}$ onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes.
   a) Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial (t = 0) seja igual a 1024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.
   b) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza a 1/8 da população inicial?

3.18 Descritor D_{30} - Teoria e Problemas

O descritor D_{30} trabalha com a identificação do gráfico das funções trigonométricas. Trataremos aqui do gráfico das funções seno, cosseno e tangente. Tais funções possuem características periódicas. As **funções periódicas** são funções que possuem um comportamento periódico. Ou seja, que ocorrem em determinados intervalos de tempo. O **período** corresponde ao menor intervalo de tempo em que acontece a repetição de determinado fenômeno.

Uma função $f : A \to B$ é periódica se existe um número real p tal que

$$f(x + p) = f(x)$$

para todo $x \in A$. O menor valor de p para o qual essa condição é satisfeita é chamado de período da função f.

3.18.1 A função $f(x) = \sin(x)$ e suas variações.

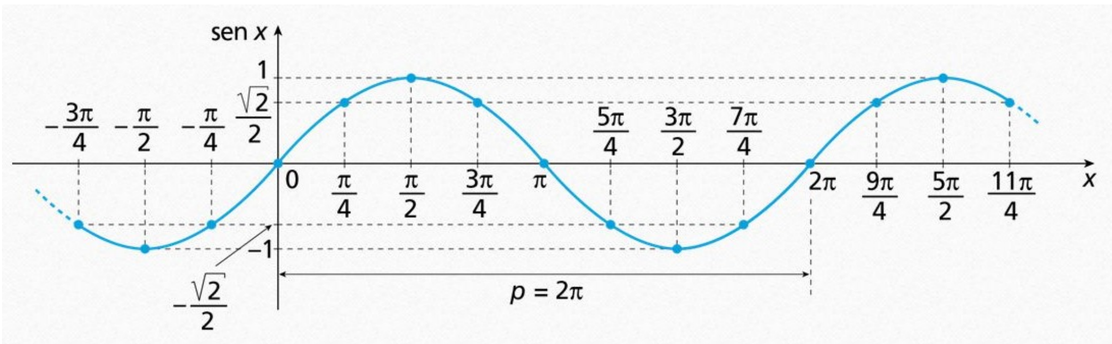
A função seno é a função $f(x) = \sin(x)$ definida para todo $x \in \mathbf{R}$. Por meio dos ângulos notáveis, podemos determinar alguns valores numéricos para a função $f(x) = \sin(x)$. Antes de determinar esses valores, uma vez que no plano trigonométrico o seno indica o eixo vertical, e que cada ponto P do círculo trigonométrico é da forma $(\cos(x), \sin(x))$ onde x indica o ângulo formado entre entre o eixo do cosseno (eixo x) e o segmento que une a origem ao ponto P, temos que a função seno assume valores negativos no terceiro e quarto quadrantes. Ou seja, para valores de x que estão entre π e 2π.

x	$\sin(x)$
0	$\sin(0) = 0$
$\frac{\pi}{6}$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$\frac{2\pi}{3}$	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
π	$\sin(\pi) = 0$
$\frac{7\pi}{6}$	$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
$\frac{5\pi}{3}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
2π	$\sin(2\pi) = 0$

Observe que pela tabela acima, temos que $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$. O período da função $\sin(x)$ é igual a 2π. Assim,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall \quad x \in \mathbf{R}$$

Quando uma função é periódica o gráfico se repete em blocos. Para o caso da função $\sin(x)$ ela repete em blocos cujo intervalo é de comprimento 2π.



O gráfico acima mostra mais uma propriedade da função $f(x) = \sin(x)$. Note que em relação a simetria, temos que a função seno é uma função ímpar. Isto é,

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

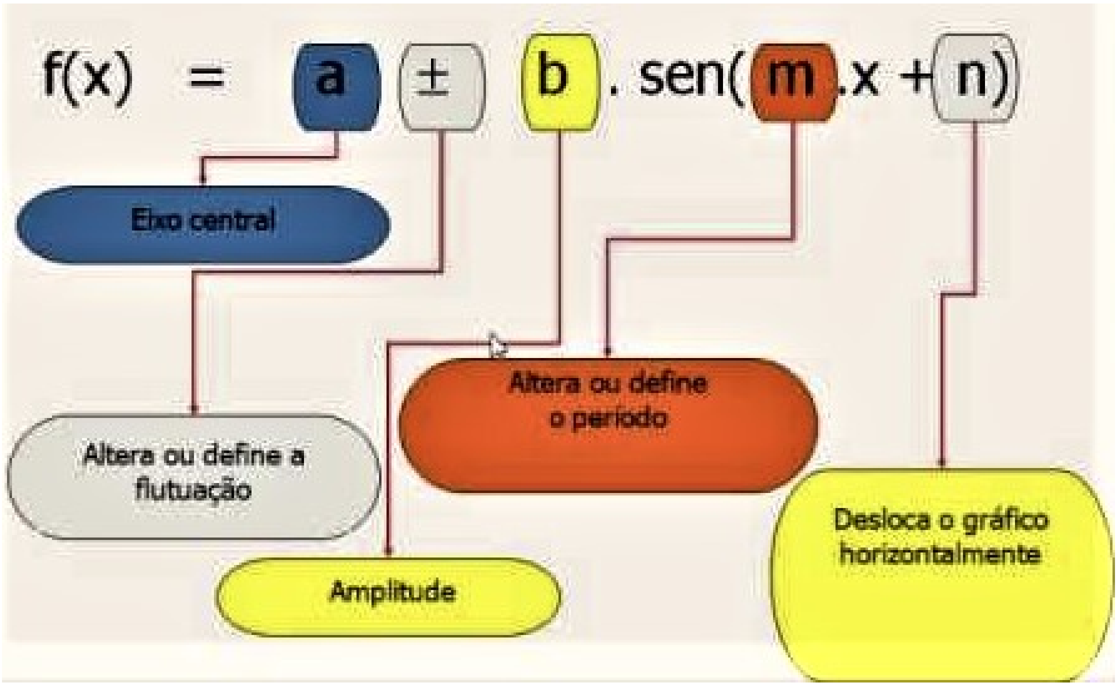
Uma outra característica que podemos destacar para a função seno é que o menor valor assumido pelo seno é -1 e o maior valor assumido pelo seno é 1. Desta forma, $f(x) = \sin(x)$ é limitada,

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

O grande intuito do descritor D_{30} é estudar os gráfico das funções trigonométricas. Assim, vamos verificar algumas variantes da função seno. Consideremos as funções da forma

$$f(x) = a \pm b \cdot \sin(m \cdot x + n)$$

Vamos ver a interpretação geométrica de cada um dos coeficientes e sua ação sobre o gráfico da função seno. A figura abaixo indica a ação que cada um dos coeficientes realiza sobre o gráfico da função $\sin(x)$.

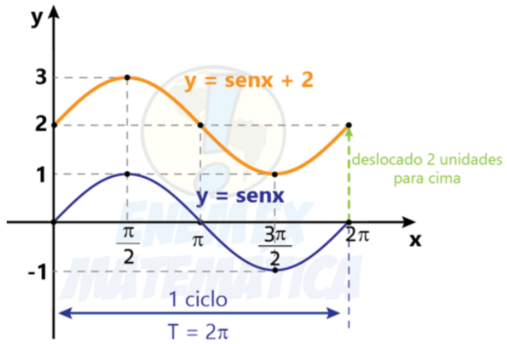


Vamos ver alguns exemplos:

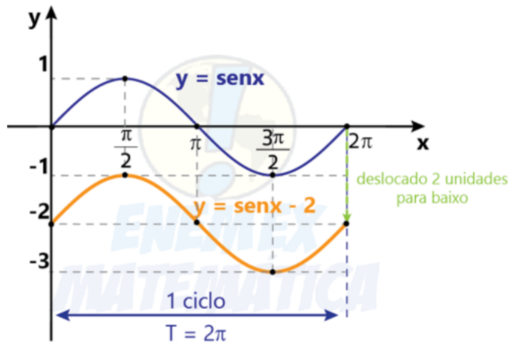
Exemplo 3.66 *Consideremos a função* $f(x) = \sin(x) + 2$, *vamos construir o gráfico dessa função. Para isso, vamos calcular alguns valores*

x	$y = \sin(x) + 2$
0	$y = \sin(0) + 2 = 2$
$\frac{\pi}{2}$	$y = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 = 1 + 2 = 3$
π	$y = \sin(\pi) + 2 = 0 + 2 = 2$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 = -1 + 2 = 1$
2π	$y = \sin(2\pi) + 2 = 0 + 2 = 2$

Observe que a função $y = \sin(x) + 2$ *é limitada e assume o valor mínimo 1 e valor máximo 3. Isto é justamente somar duas unidades no valor mínimo e máximo da* *função $y = \sin(x)$. Logo, a influência do valor 2 que aparece somando $\sin(x)$ na função $y = \sin(x) + 2$ é transladar verticalmente a função $\sin(x)$ duas unidades. Assim, temos o gráfico*



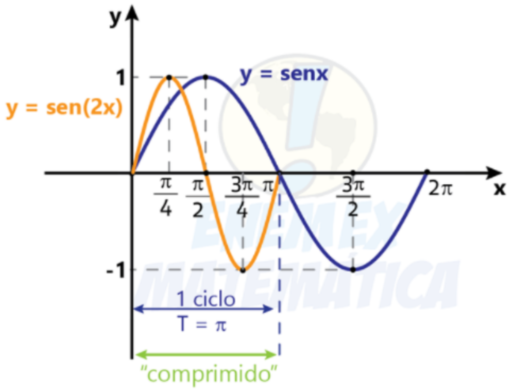
Caso estivéssemos interessados na função $y = \sin(x) - 2$, teríamos a seguinte situação gráfica.



Exemplo 3.67 *Consideremos a função $f(x) = \sin(2x)$, vamos construir o gráfico dessa função. Para isso, vamos calcular alguns valores*

x	$y = \sin(2x)$
0	$y = \sin(2 \cdot 0) = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$y = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 1$
$frac\pi2$	$y = \sin(\pi) = 0$
$\frac{3\pi}{4}$	$y = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
π	$y = \sin(2\pi) = 0$

Observe que a função $y = \sin(2x)$ é limitada e assume o valor mínimo -1 e valor máximo 1 como a função $\sin(x)$. Mas podemos notar que desde que a função assume o valor zero, volta assumir o valor zero em um período π, que é justamente a metade do período da função $\sin(x)$. Assim, a ação da multiplicação de x por 2, faz com que o período da função $\sin(x)$ reduz a metade. Temos o seguinte gráfico



Se considerássemos a função $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, *teríamos a situação gráfica*

onde o período agora é dobrado em relação ao período da função $\sin(x)$.

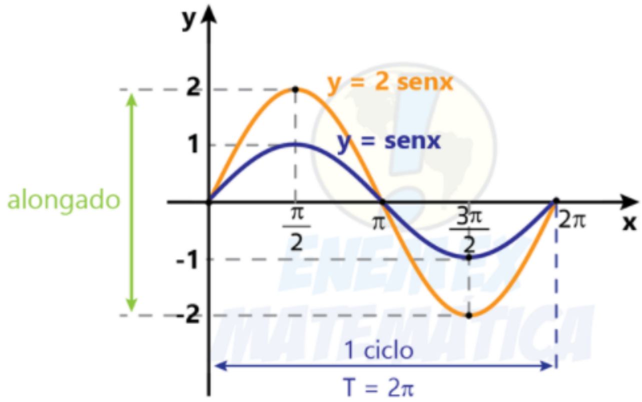
De modo geral, se $k > 0$ então o período da função $\sin(kx)$ é $\frac{2\pi}{k}$ e o período da função $\sin\left(\frac{x}{k}\right)$ é $k \cdot 2\pi$.

- Se $k = 2$, então o período é a metade de 2π;
- Se $k = \frac{1}{2}$, então o período é o dobro de 2π.

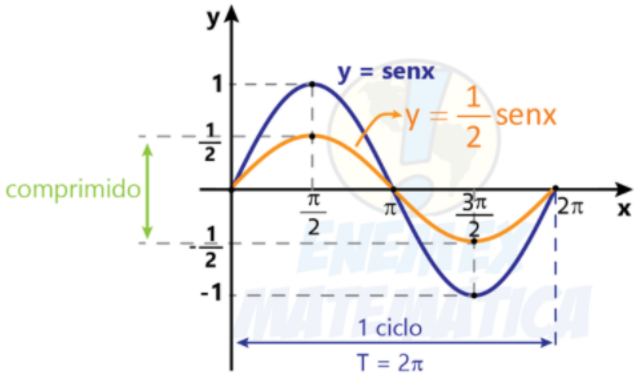
Exemplo 3.68 *Consideremos a função* $f(x) = 2\sin(x)$, *vamos construir o gráfico dessa função. Para isso, vamos calcular alguns valores*

x	$y = 2\sin(x)$
0	$y = 2\sin(0) = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 = 2$
π	$y = 2\sin(\pi) = 2 \cdot 0 = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot (-1) = -2$
2π	$y = 2\sin(2\pi) = 2 \cdot 0 = 0$

Observe que a função $y = 2\sin(x)$ *é limitada e assume o valor mínimo -2 e valor máximo 2. Isto é justamente dobrar o valor máximo e valor mínimo da função* $y = \sin(x)$. *Logo, a influência do valor 2 que aparece multiplicando* $\sin(x)$ *na função* $y = 2\sin(x)$ *é "alongado"a função* $\sin(x)$ *duas unidades. O período é o mesmo da função* $\sin(x)$ *Assim, temos o gráfico*



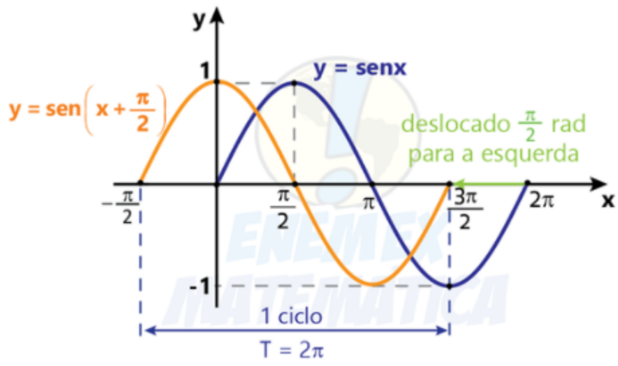
Caso estivéssemos interessados na função $y = \frac{1}{2}\sin(x)$*, teríamos a seguinte situação gráfica.*



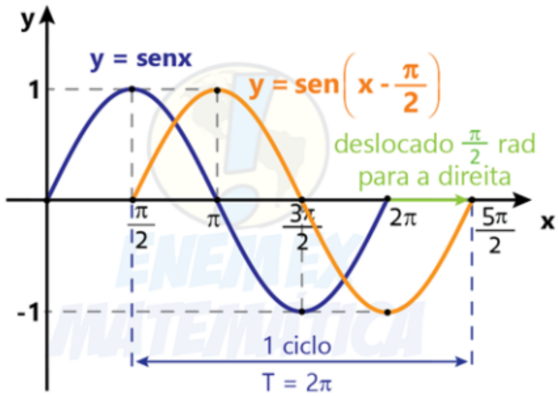
Exemplo 3.69 *Consideremos a função* $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$*, vamos construir o gráfico dessa função. Para isso, vamos calcular alguns valores*

x	$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
0	$y = \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$
π	$y = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\pi) = 0$
2π	$y = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Observe que a função $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *é limitada e assume o valor mínimo -1 e valor máximo 1. Isto é, assume o mesmo o valor máximo e valor mínimo da função* $y = \sin(x)$*. A soma de* $\frac{\pi}{2}$ *no argumento da função* $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *faz com que o gráfico desloque horizontalmente para esquerda, exatamente* $\frac{\pi}{2}$*, em relação a função* $\sin(x)$*. O período é o mesmo da função* $\sin(x)$ *Assim, temos o gráfico*



Caso estivéssemos interessados na função $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, *teríamos a seguinte situação gráfica.*

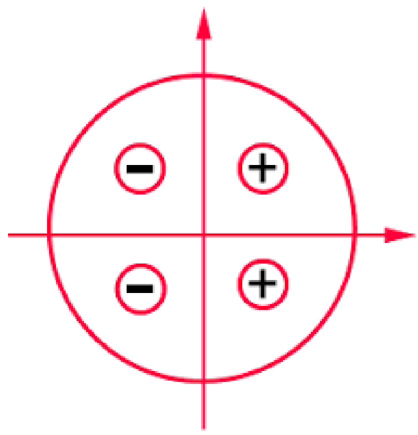


3.18.2 A função $f(x) = \cos(x)$ e suas variações

A função $f(x) = \cos(x)$ é uma função par, isto é,

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

para todo $x \in \mathbf{R}$. Usando a mesma discussão sobre a localização dos pontos $(\cos(x), \sin(x))$ usadas para a função $\sin(x)$ temos que que a função cosseno é positiva no primeiro e quarto quadrante e, portanto, negativa no segundo e terceiro quadrante.



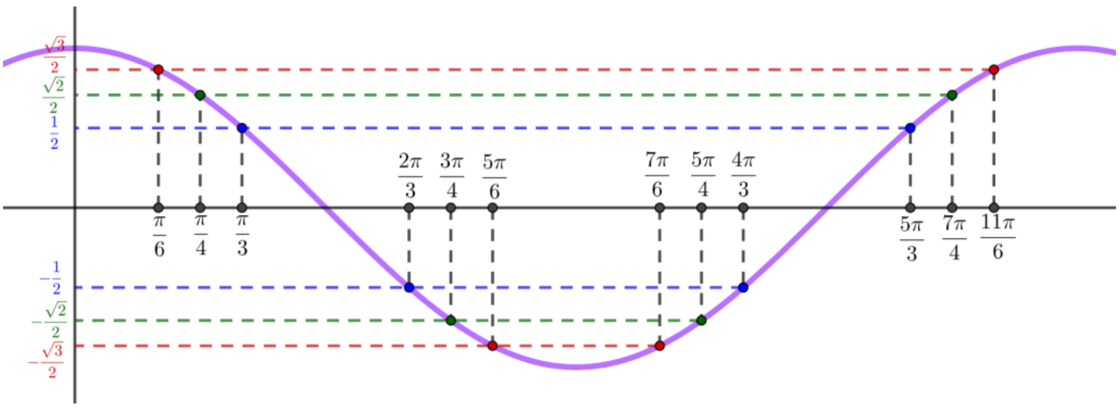
Usando os ângulos notáveis temos os seguintes valores numéricos para a a função $f(x) = \cos(x)$

x	$\cos(x)$
0	$\cos(0) = 1$
$\frac{\pi}{6}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\frac{2\pi}{3}$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	$\cos(\pi) = -1$
$\frac{7\pi}{6}$	$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
$\frac{5\pi}{3}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2π	$\cos(2\pi) = 1$

Observe que pela tabela acima, temos que $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$. O período da função $\cos(x)$ é igual a 2π. Assim,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \forall \quad x \in \mathbf{R}$$

Novamente, temos uma função que é periódica. Assim o gráfico se repete em blocos. Para o caso da função $\cos(x)$, como para função $\sin(x)$, ela repete em blocos cujo intervalo é de comprimento 2π.



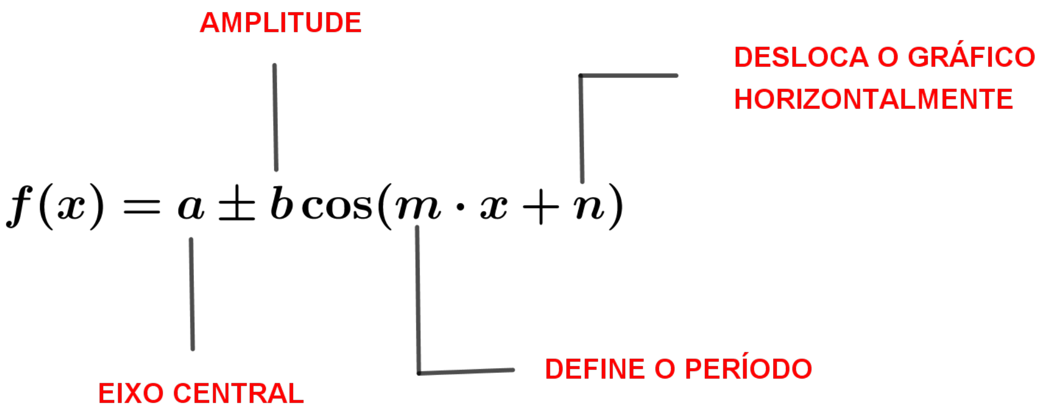
Podemos observar que, da mesma forma que a função seno, a função cosseno é limitada por -1 e 1. Ou seja

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

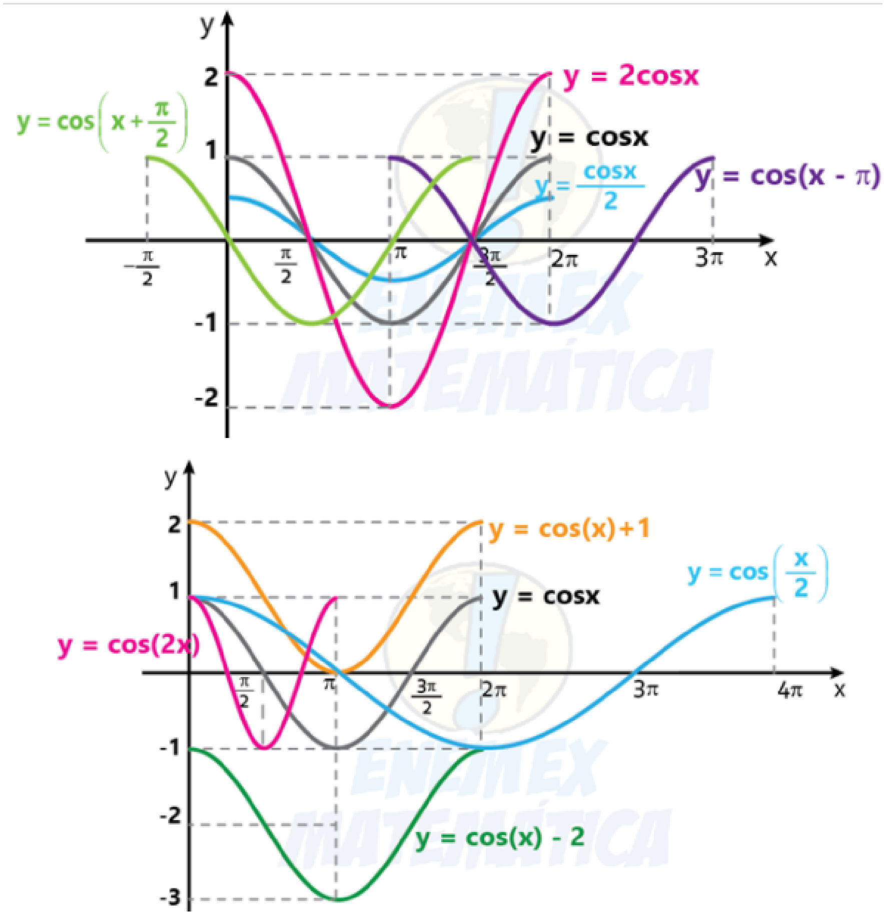
Seguindo a mesma estratégia que usamos para função seno, queremos estudar as funções

$$f(x) = a \pm b\cos(m \cdot x + n)$$

onde cada coeficiente $\{a, b, m, n\}$ possui uma interpretação e faz uma alteração no gráfico, seja no período, na amplitude ou em ambos.



A figura abaixo resume a influência de cada um dos coeficientes quando comparamos as funções $\cos(2x)$, $2\cos(x)$, $\cos(x) \pm 1$, $\frac{1}{2}\cos(x)$ e $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right)$ com a função $\cos(x)$.



Usando a paridade das funções seno e cosseno, podemos mostrar que

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{valor } 0} - \sin(x)\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{valor -1}} = \sin(x)$$

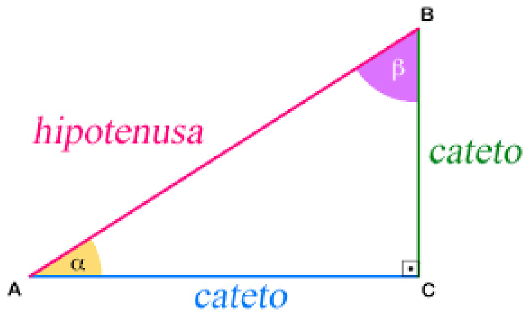
Isto quer dizer que $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ e $y = \sin(x)$ possuem o mesmo gráfico.

3.18.3 A função $f(x) = \tan(x)$

A função tangente é a função simbolizada por

$$f(x) = \tan(x)$$

Relembrando que em medidas trigonométricas do triângulo retângulo



temos que a tangente é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Em termos da figura acima, olhando para o ângulo α

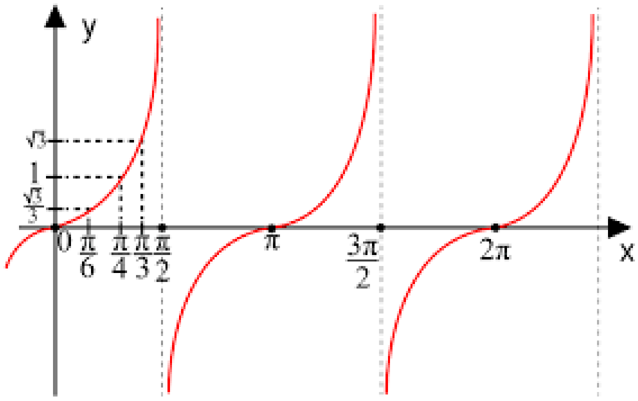
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{Cateto oposto a } \alpha} = \frac{\frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}}{\frac{\text{Cateto adjacente a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Portanto, a função tangente num valor x é a razão numérica entre as funções, seno e cosseno, no mesmo valor x. Como $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, temos que $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ não existe. Devido a este fato, o gráfico da função tangente fica compreendido entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. E como é de se esperar, no intervalo $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

A função tangente também é periódica, mas diferente da função seno e cosseno, seu período é π. Isto é,

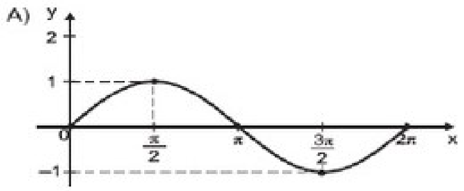
$$\tan(x+\pi) = \tan(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{com} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

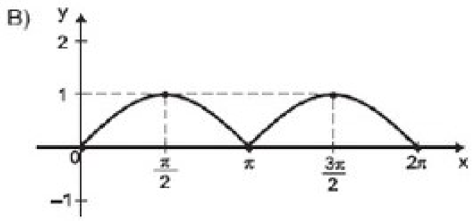
A figura abaixo mostra o gráfico da função tangente. Podemos observar que a periodicidade da função leva a repetição do traço da função em cada intervalo de comprimento π que não contenha os pontos onde a função $\cos(x)$ se anula.

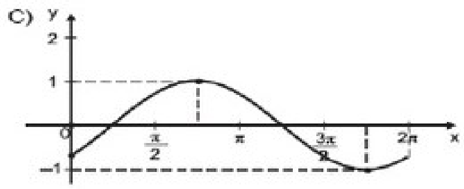


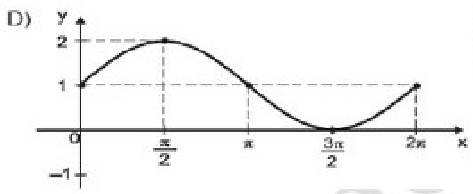
3.18.4 Problemas Propostos

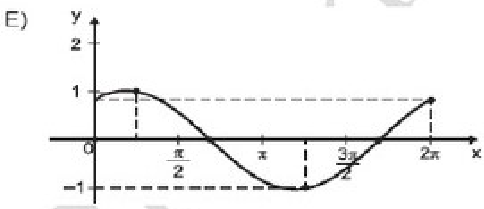
1. Qual é a representação gráfica da função trigonométrica $f(x) = 1 + \sin(x)$ de domínio$[0, 2\pi]$?



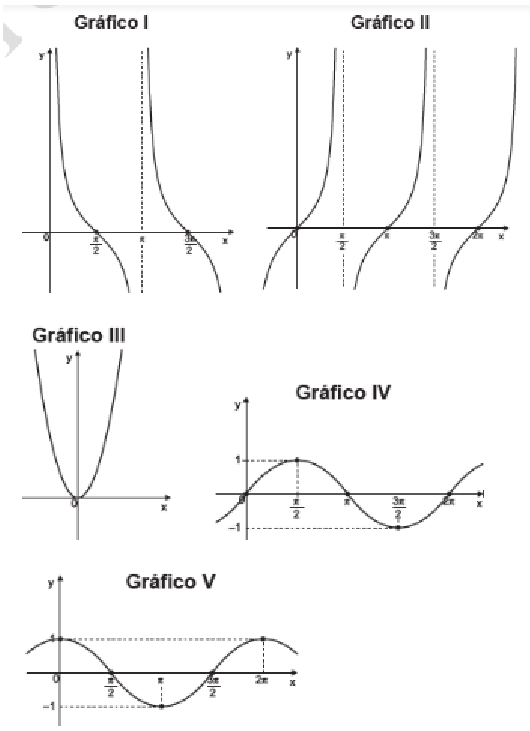








2. Observe os gráficos abaixo



Qual desses gráficos representa um esboço do gráfico da função tangente?

a) I.

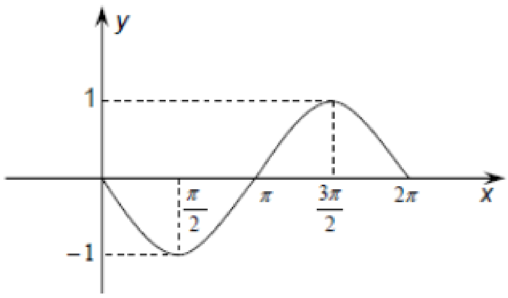
b) II.

c) III.

d) IV.

e) V.

3. Observe o gráfico abaixo



Qual a função que melhor representa esse gráfico no intervalo $[0, 2\pi]$?

a) $y = -\cos(x)$

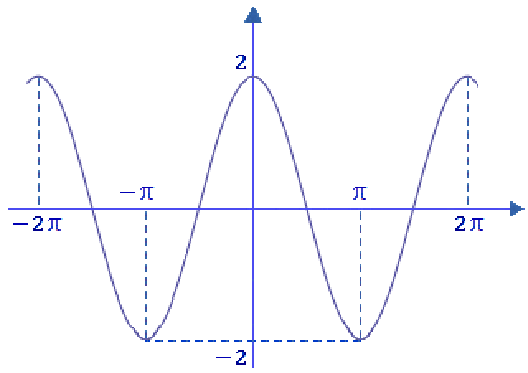
b) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \sin(-x)$

d) $y = \sin(2x)$

e) $y = 2\sin(x)$

4. Observe o gráfico a seguir



Qual a função que melhor representa esse gráfico no intervalo $[0, 2\pi]$?

a) $y = -\cos(x)$

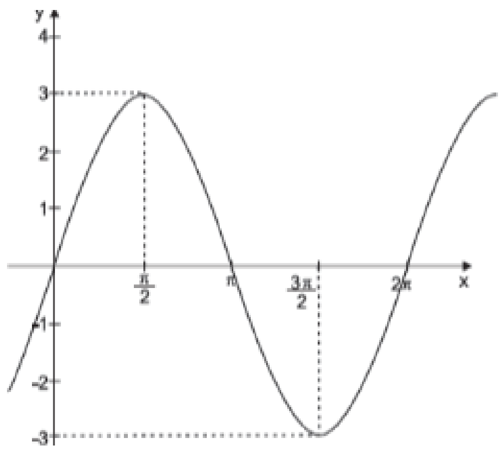
b) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = 2\sin(-x)$

d) $y = \sin(2x)$

e) $y = 2\cos(x)$

5. A figura abaixo mostra o gráfico de uma função real $y = a \cdot \sin(bx)$.



Nessa função, os valores de a e b são, respectivamente,

a) 1 e 3.

b) - 1 e 3.

c) - 1 e - 3.

d) 3 e 1.

e) - 3 e 1.

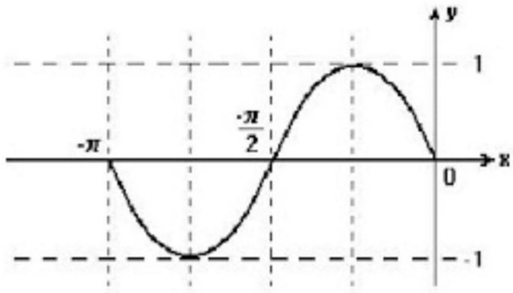
6. Seja $f(x) = 2 + \cos(x)$, com $x \in [0, 2\pi]$. Se M é o valor máximo e m é o valor mínimo de $f(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, então o valor de $\frac{M}{2m}$ é:

a) $\frac{3}{2}$ b) 2 c) $\frac{2}{3}$ d) 3 e) 0

7. Seja $f(x) = 2 - \sin(x)$, com $x \in [0, 2\pi]$. Se M é o valor máximo e m é o valor mínimo de $f(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, então o valor de $\frac{M}{2m}$ é:

a) $\frac{3}{2}$ b) 2 c) $\frac{2}{3}$ d) 3 e) 0

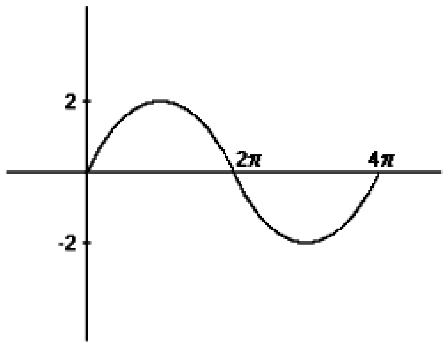
8. Indique a função trigonométrica $f(x)$ de domínio $\mathbf{R}$ e período π que é representada, aproximadamente, pelo gráfico a seguir:



.

a) $y = 1 + \cos(x)$
b) $y = 1 - \sin(x)$
c) $y = \sin(-2x)$
d) $y = \cos(2x)$
e) $y = \cos(-x)$

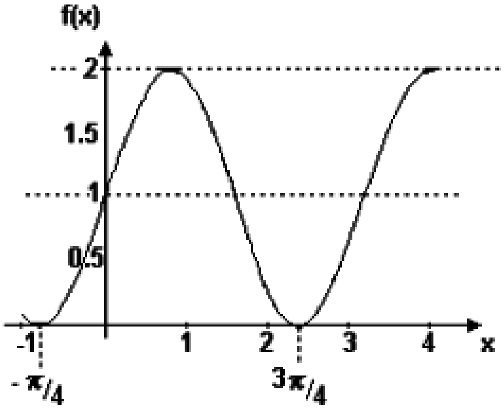
9. A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:



.

a) $y = \sin(x)$
b) $y = 2\sin(x/2)$
c) $y = 2\sin(x)$
d) $y = 2\sin(2x)$
e) $y = \sin(2x)$

10. O gráfico seguinte corresponde a uma das funções de IR em IR a seguir definidas. A qual delas?



.

a) $y = 1 + \sin(2x)$

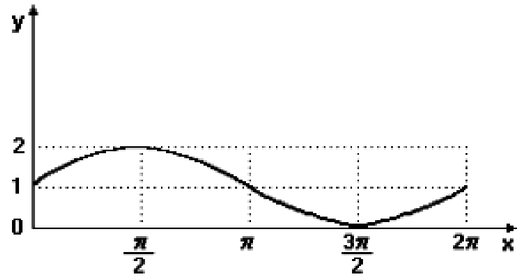
b) $y = 1 + \cos(x)$

c) $y = 2\sin(x)$

d) $y = 2\sin(2x)$

e) $y = 1 + \cos(2x)$

11. O gráfico seguinte corresponde a uma função definida para $0 \leq x \leq 2\pi$.



Qual função descreve esse gráfico?

a) $y = \sin(x + 1)$

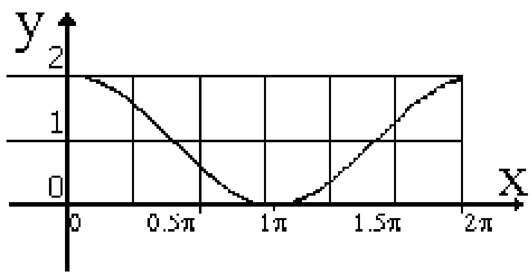
b) $y = 1 + \sin(x)$

c) $y = \sin(x) + \cos(x)$

d) $y = 2\sin(2x)$

e) $y = 1 - \cos(x)$

12. O gráfico a seguir representa a função real f.



Qual função descreve esse gráfico?

a) $y = 1 - \cos(x)$

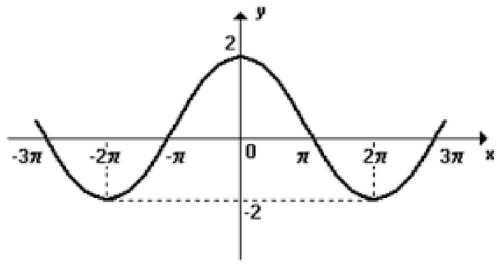
b) $y = 1 + \cos(x)$

c) $y = \cos(x + 1)$

d) $y = \cos(x - 1)$

e) $y = \cos(x + \pi)$

13. Na figura a seguir tem-se parte do gráfico da função f, de IR em IR, dada por $f(x) = k \cdot \cos(tx)$.



Nessas condições, calculando-se $k - t$ obtém-se

a) $-\frac{3}{2}$ b) -1 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{2}$ e) 0

14. Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função

$$T(h) = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$$

sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($0 \leq h \leq 24$) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã. Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) $A = 18$ e $B = 8$

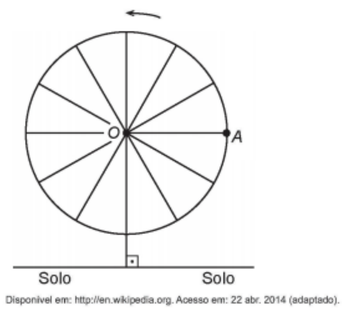
b) $A = 22$ e $B = -4$

c) $A = 22$ e $B = 4$

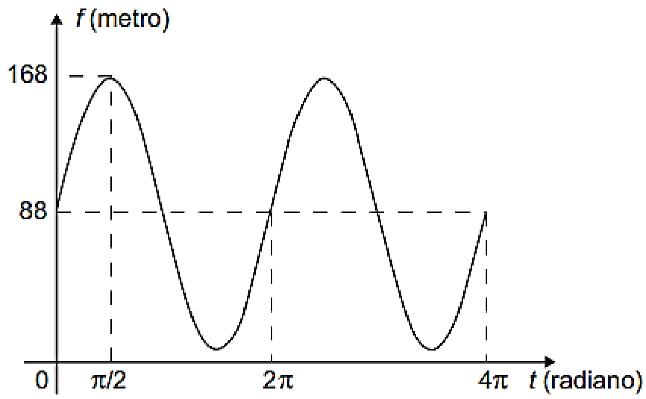
d) $A = 26$ e $B = -8$

e) $A = 26$ e $B = 8$

15. Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f em o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

a) $f(t) = 80\sin(t) + 88$

b) $f(t) = 80\cos(t) + 88$

c) $f(t) = 88\cos(t) + 168$

d) $f(t) = 168\sin(t) + 88\cos(t)$

e) $f(t) = 88\sin(t) + 168\cos(t)$

3.19 Descritor D_{31} - Teoria e Problemas

Neste descritor iremos determinar a solução de um sistema linear associando- o a uma matriz. Iniciaremos abordando um pouco sobre os sistemas lineares e os métodos para se obter a solução de um sistema linear.

3.19.1 Sistemas Lineares do tipo 2×2

Um sistema de equações é um **sistema linear do tipo** 2×2 se é formado por duas equações de retas no plano (equações do primeiro grau em duas variáveis). Isto é, o sistema é da forma

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

As variáveis do sistema são x e y, enquanto $a, b, c, d.e, f$ são coeficientes reais do sistema.

A **solução** de um sistema linear

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f, \end{aligned}$$

se existir, é um par de valores (x_0, y_0) tal que

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 &= e \\ cx_0 + dy_0 &= f \end{aligned}$$

Ou seja, o par (x_0, y_0) satisfaz as duas equações.

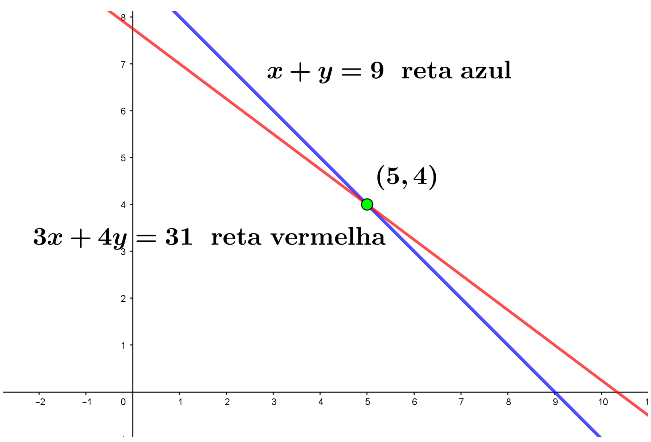
Exemplo 3.70 *O sistema de equações*

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 3x + 4y &= 31 \end{aligned}$$

é um sistema linear formado por duas equações que representam graficamente retas no plano. A solução desse sistema é o par $(5, 4)$ *(*$x = 5$ *e* $y = 4$*). De fato,*

$$\begin{aligned} 5 + 4 &= 9 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 &= 15 + 16 = 31 \end{aligned}$$

A interpretação gráfica da solução de um sistema linear é o ponto de interseção das retas que compõem o sistema linear.



Agora, vamos explorar como obter a solução desses sistemas do tipo 2×2. É bom enfatizar que os problemas que mais interessam são aqueles que por meio de uma modelagem construímos as equações do sistema linear. Este processo de modelagem, consiste em interpretar o ambiente proposto e associar equações que representam as situações abordadas no texto. Vamos ao primeiro exemplo:

Exemplo 3.71 *Maria tem em sua bolsa R$ 15,60 em moedas de R$ 0,10 e de R$ 0,25. Dado que o número de moedas de 25 centavos é o dobro do número de moedas de 10 centavos, o total de moedas na bolsa é:*

a) 68. *b) 75.* *c) 78.* *d) 81.* *e) 84.*

Resolução 89 *Nosso primeiro objetivo é modelar o problema (associar equações ao problema) Para este fim, vamos denotar*

Qtd. moedas de R$ 0,10 x	**Qtd. moedas de R$ 0,25** y
Total em R$ é $0,10x$	*Total em R$ é* $0,25y$

Sendo a quantidade na bolsa de R$ 15,60, temos a equação

$$0,10x + 0,25y = 15,60$$

Dado que o número de moedas de 25 centavos é o dobro do número de moedas de 10 centavos, temos a equação

$$y = 2x$$

Segue que temos os sistema

$$\begin{aligned} 0,10x + 0,25y &= 15,60 \\ y &= 2x \end{aligned}$$

O primeiro método que discutiremos é o da ***substituição****, Vamos substituir y por $2x$ na primeira equação, obtendo*

$$0,10x + 0,25\underbrace{y}_{2x} = 15,60 \quad \textit{implica que} \quad 0,10x + 0,50x = 15,60$$

Portanto, $0,60x = 15,60$ e, assim, $x = 26$. Usando esse valor na equação $y = 2x$, temos que $y = 2 \cdot 26 = 52$. Assim, ela possuía 26 moedas de 10 centavos e 52 moedas de 25 centavos, tendo um total de $26 + 52 = 78$ moedas.

O exemplo anterior permitiu explorar sobre a modelagem de um problema e o emprego do primeiro método de solução (substituição). Não existe um critério de escolha sobre qual método utilizar, mas em prolemas onde uma das variáveis isoladas não possui uma expressão "assombrosa"(frações, raízes, etc.) o método da substituição é uma boa escolha. Agora, vamos abordar o **método da adição**. De todos os métodos, o da adição é o mais utilizado e familiarizado por todos.

Exemplo 3.72 *Um teste é composto por 50 questões. Na correção, uma questão vale 3 pontos e uma errada -2 pontos. Ao terminar essa prova alguém atingiu 75 pontos. Quantas questões essa pessoa acertou?*

a) 25 *b) 30* *c) 35* *d) 40* *e) 55*

Resolução 90 *Nosso primeiro passo é identificar as variáveis do problema.*

Qtd. de acertos x	**Qtd. de erros** y
Total de pontos $3x$	*Total de pontos* $-2y$

Assim, sendo um total de 50 questões, temos que $x + y = 50$. Como a pontuação foi 75, temos a equação $3x - 2y = 75$. Logo, temos o seguinte sistema linear

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ 3x - 2y &= 75 \end{aligned} \tag{3.2}$$

No método da adição, buscamos manipular uma ou duas equações (se necessário), por meio de multiplicações por uma constante escolhida, de tal forma que a adição das equações leve ao cancelamento de uma variável. O sistema que obtemos após a manipulação é equivalente ao sistema original. Assim, vamos escolher multiplicar a primeira equação, $x + y = 50$, por 2. Isto, permitirá que a adição elimina a variável y.

$$\begin{array}{rcrl} 2x + 2y & = & 100 & \\ 3x - 2y & = & 75 & (+) \\ \hline 5x & = & 175 & \end{array}$$

Assim, $x = 35$ (que é o que desejamos encontrar). Sendo $x+y = 50$, temos que $y = 15$. Assim, que marcou 75 pontos, acertou 35 questões e errou 15 questões.

A próxima discussão será voltada para o **método da comparação**. De todos os métodos, seja o menos utilizado. Vejamos como proceder usando esse método da resolução do seguinte problema.

Exemplo 3.73 *Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. A terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do número de balas de laranjas em 4 unidades. Qual o número de balas de hortelã?*

a) 20 *b) 22* *c) 24* *d) 28* *e) 30*

Resolução 91 *Novamente, iniciaremos destacando as variáveis e as propriedades que elas devem satisfazer. Vamos denotar por x a quantidade de balas de hortelã e por y a quantidade de balas de laranja. Então as falas:*

- *Um pacote tem 48 balas indica que* $x + y = 48$
- *A terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do número de balas de laranjas em 4 unidades. indica que*

$$\underbrace{\frac{2x}{3}}_{\textbf{\textit{terça parte do dobro}}} \qquad = \qquad \underbrace{\frac{y}{2}+4}_{\textbf{\textit{excede a metade em 4 und.}}}$$

O próximo passo é isolar a mesma variável (quantidade) nas duas equações. Uma escolha particular, isolaremos a quantidade $2x$. Para isso note que

$$x + y = 48 \quad \textit{implica que} \qquad \underbrace{2x + 2y = 96}_{\textit{multiplicamos por 2}}$$

Assim, $2x = 96 - 2y$. Para a outra equação, temos

$$\frac{2x}{3} = \frac{y}{2} + 4 \quad \textit{implica que} \qquad \underbrace{2x = \frac{3y}{2} + 12}_{\textit{multiplicamos por 3}}$$

Agora, temos o sistema equivalente

$$\begin{aligned} 2x &= 96 - 2y \\ 2x &= \frac{3y}{2} + 12 \end{aligned}$$

ao qual podemos comparar os lados direitos (right sides) dessas equações, pois representam a mesma quantidade. Assim,

$$\underbrace{96 - 2y = \frac{3y}{2} + 12}_{\textit{multiplicar por 2 para eliminar a fração}}$$

$$192 - 4y = 3y + 24 \quad \textit{implica que} \quad 7y = 168 \quad \textit{logo,} \quad y = 24$$

Assim, temos 24 balas de laranja e, respectivamente, 24 balas de hortelã.

Mesmo apresentando três métodos, substituição, adição e comparação, ressaltamos que todos são equivalentes. A escolha de um ou outro na resolução vai de acordo com a familiaridade ou facilidade do emprego de um deles.

3.19.2 Sistemas lineares 2×2 e a forma matricial

Todo sistema linear pode ser escrito na forma $A \cdot X = B$ onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das variáveis e B é a matriz da constante ou da igualdade. A matriz A é do mesmo tipo do sistema linear e guarda informações substanciais sobre a existência e unicidade da solução. Discutiremos essa parte do estudo de sistemas lineares nessa subseção. A discussão será realizada para sistemas formado por duas equações e duas variáveis, mas já adiantamos que, com devidas adaptações, o resultado se estende para sistemas de ordem maior.

O sistema linear

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f, \end{aligned}$$

pode ser escrito na forma $A \cdot X = B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Uma discussão sobre os possíveis resultados para o sistema linear 2×2 é dado por meio do determinante de algumas matrizes. Vamos inicialmente considerar a seguinte matriz.

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

que é chamada de **matriz ampliada** relacionada ao sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f. \end{aligned}$$

Destacamos três submatrizes da matriz (3.3), que são denominados **menores principais** de ordem 2.

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{matriz dos coeficientes}}$$

$$\underbrace{D_x = \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}_{\text{troca primeira coluna de A com a coluna da matriz B}}$$

e

$$\underbrace{D_y = \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \end{pmatrix}}_{\text{troca segunda coluna de A com a coluna da matriz B}}$$

Uma forma alternativa e que permite uma boa interpretação da discussão do sistema linear é dado pela **Regra de Cramer**. Tal regra permite calcular a solução do sistema por meio dos determinantes das matrizes A, D_x e D_y.

A solução do sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f. \end{aligned}$$

caso exista, é dada por

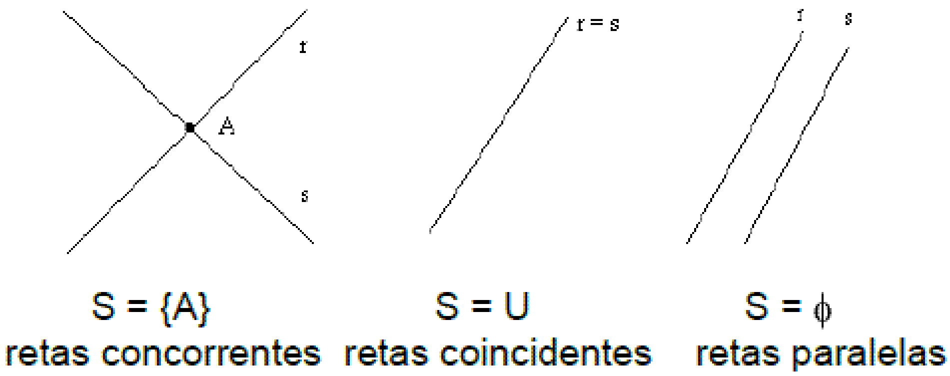
$$x = \frac{|D_x|}{|A|} \quad \text{e} \quad y = \frac{|D_y|}{|A|}$$

onde $|A|$, $|D_x|$ e $|D_y|$ são os determinantes das matrizes A, D_x e D_y, respectivamente.

Por meio da regra de Cramer, podemos notar que

- **Condição de existência e unicidade de soluções:** O sistema admite uma única solução se $|A| \neq 0$.
- **Infinitas soluções:** O sistema admite infinitas soluções se $|A| = 0$, $|D_x| = 0$ e $|D_y| = 0$.
- **Nenhuma solução:** O sistema não admite soluções se $|A| = 0$ e $|D_x| \neq 0$ e (ou) $|D_y| \neq 0$.

Graficamente, a discussão acima nos remete, respectivamente, a interpretação geométrica.



Agora, vamos exemplificar a resolução de um sistema 2×2 por meio da regra de Cramer.

Exemplo 3.74 *Uma prova de múltipla escolha com 60 questões foi corrigida da seguinte forma: o aluno ganhava 5 pontos por questão que acertava e perdia 1 ponto por questão que errava ou deixava em branco. Um aluno totalizou 210 pontos. Qual o número de questões que ele acertou?*

Resolução 92 *Nomeando por x a variável número de acertos e por y a variável números de erros e questões em branco. Naturalmente, temos o sistema linear*

$$\begin{aligned} x + y &= 60 \\ 5x - y &= 210 \end{aligned}$$

A matriz ampliada é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 5 & -1 & 210 \end{pmatrix}$$

e temos as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_x = \begin{pmatrix} 60 & 1 \\ 210 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad D_y = \begin{pmatrix} 1 & 60 \\ 5 & 210 \end{pmatrix}$$

Calculamos os determinantes de cada matriz (diagonal principal menos diagonal secundária)

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = -1 - 5 = -6 \quad \text{única solução} \\ |D_x| &= 60 \cdot (-1) - 1 \cdot 210 = -60 - 210 = -270 \\ |D_y| &= 1 \cdot 210 - 5 \cdot 60 = 210 - 300 = -90 \end{aligned}$$

Segue pela regra de Cramer que

$$x = \frac{|D_x|}{|A|} = \frac{-270}{-6} = 45 \quad e \quad y = \frac{|D_y|}{|A|} = \frac{-90}{-6} = 15$$

Assim são 45 acertos e 15 erros.

3.19.3 Sistemas lineares do tipo 3×3

A discussão das duas seções anteriores pode ser replicadas para o sistema 3×3. Não iremos trazer todo rigor da análise feita na seções que mencionamos. Vamos aplicar diretamente as extensões na resolução de problemas. É bom enfatizar que sistema do tipo 3×3 são sistemas formado por três equações e três variáveis.

Exemplo 3.75 *Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris* *foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?*

a) 26 *b) 38* *c) 42* *d) 62* *e) 68*

Resolução 93 *Vamos denotar cada uma das variáveis*

Qtd. Lisboa	***Qtd. Paris***	***Qtd. Roma***
x	y	z

Traduzimos cada uma das propriedades dessas três variáveis:

- *Total de passagens 78*

$$x + y + z = 78$$

- *Número de passagens vendidas para Paris é o dobro do número de passagens vendidas para os outros países.*

$$y = 2 \cdot (x + z) \quad \textit{implica que} \quad y = 2x + 2z$$

- *Para Roma foram vendidas duas passagens a mais do que a metade das vendidas para Lisboa.*

$$z = \frac{x}{2} + 2 \quad \textit{implica que} \quad 2z = x + 4$$

A três equações nos remete ao sistema linear

$$\begin{aligned} x + y + z &= 78 \\ y &= 2x + 2z \\ 2z &= x + 4 \end{aligned}$$

Já exploramos nas última seções alguns métodos de solução. Vamos seguir diferente nessa questão. Note que a segunda equação $y = 2x + 2z$ pode ser manipulada somando de ambos os lados da igualdade a quantidade $2y$

$$y + 2y = 2x + 2z + 2y \quad \textit{implica que} \quad 3y = 2(x + y + z)$$

Pela primeira equação, temos que a soma $x + y + z = 78$, logo

$$3y = 2 \cdot 78 \quad \textit{implica que} \quad y = 52$$

Agora substituímos o valor $y = 52$ e a terceira equação na primeira equação, obtendo

$$2z - 4 + 52 + z = 78 \quad \textit{implica que} \quad 3z = 30, \quad \textit{logo} \quad z = 10$$

Finalmente, sendo $z = 10$ *e* $y = 52$*, temos que* $x = 16$*. Assim, para Paris e Roma, forma vendidas* $10 + 52 = 62$ *passagens.*

Para a resolução do exemplo anterior, aplicamos mais a substituição do que os demais métodos. De fato, quando temos mais de duas variáveis, a técnicas de solução percorrem mais um processo de análise sobre as equações e manipulações a serem realizadas do que o mero processo de repetição árdua de um único método.

3.19.4 Problemas Propostos

1. O diretor de uma empresa convocou todos os seus funcionários para uma reunião. Com a chegada do diretor à sala de reuniões, o número de homens presentes na sala ficou quatro vezes maior que o número de mulheres também presentes na sala. Se o diretor não fosse à reunião e enviasse sua secretária, o número de mulheres ficaria a terça parte do número de homens. Qual a quantidade de pessoas na sala aguardando o diretor?

   a) 20 b) 19 c) 18 d) 15 e) 12

2. ——————————————————- Paula fez um teste que continha 36 questões. Nesse teste, ela respondeu todas as questões, obtendo um número de acertos igual ao triplo do número de erros. Quantas questões desse teste Paula errou? a) 4 b) 9 c) 12 d) 18 e) 27

3. Um funcionário do depósito separou as peças guardadas por peso, marcando com a mesma cor as peças de pesos iguais. O dono do depósito observou três pedidos e os seus respectivos pesos: um pedido contendo uma peça amarela, uma azul e uma verde pesou 100 g; outro pedido contendo duas peças amarelas, uma azul e três verdes pesou 200 g; e um pedido contendo uma peça amarela, duas azuis e quatro verdes pesou 250 g. Com essas informações, o dono construiu um sistema de equações e conseguiu, então, calcular o peso de cada peça. Um sistema que permite calcular o peso de cada peça

   a) $$\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 100 \\ 2x+y+z &=& 200 \\ x+2y+4z &=& 250 \end{array}$$

   b) $$\begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 100 \\ x+y+2z &=& 200 \\ x+3y+4z &=& 250 \end{array}$$

   c) $$\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 100 \\ x+y+z &=& 200 \\ x+y+z &=& 250 \end{array}$$

d) $\begin{aligned} x+y+z &= 250 \\ 2x+y+3z &= 200 \\ x+2y+4z &= 100 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x+y+z &= 550 \\ 2x+y+3z &= 550 \\ x+2y+4z &= 550 \end{aligned}$

4. Para que o sistema linear $\begin{aligned} 2x+y &= 5 \\ ax+2y &= b \end{aligned}$ seja possível e indeterminado (única solução), o valor de $a+b$ é:

a) –1 b) 4 c) 9 d) 14 e) 19

5. Rasgou-se uma das fichas onde foram registrados o consumo e a despesa correspondente de três mesas de uma lanchonete, como indicado abaixo.

Nessa lanchonete, os sucos têm um preço único, e os sanduíches também. O valor da despesa da mesa 3 é

a) R\$5,50. b) R\$6,00 c) R\$6,40. d) R\$7,00 e) R\$7,20

6. A soma das idades da Ana, do José e da Sara é 60 anos. A Ana é mais velha que o José pelo mesmo número de anos que o José é mais velho que a Sara. Quando o José tiver a idade que a Ana tem hoje, a Ana terá três vezes a idade que a Sara tem hoje. Qual a idade de Sara?

a) 10 b) 12 c) 14 d) 15 e) 17

7. Observe o sistema de equações lineares abaixo.

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z &= 58 \\ 3x-5y &= 8 \\ 2y &= 4 \end{aligned}$$

A solução desse sistema é o terno ordenado

a) $(2,3,0)$. b) $(3, \breve{\ }5, 2)$. c) $(4,0,0)$. d) $(6,2,10)$. e) $(58,8,4)$.

8. Os ingressos para uma peça de teatro tinham dois valores: o valor integral, R\$ 50,00, e o valor de meia-entrada, R\$ 25,00. Ao todo, foram vendidos 150 ingressos para essa peça, o que gerou uma receita de R\$ 6 000,00. Qual foi a quantidade

de ingressos de meia-entrada vendidos para essa peça de teatro?

a) 30 b) 40 c) 60 d) 75 e) 80

9. Uma loja vende certo componente eletrônico, que é fabricado por três marcas diferentes X, Y e Z. Um levantamento sobre as vendas desse componente, realizado durantes três dias consecutivos revelou que:

- No 1º dia, foram vendidos dois componentes da marca X, um da marca Y e um da marca Z, resultando um total de vendas igual a R$ 150,00;
- No 2º dia, foram vendidos quatro componentes da marca X, três da marca Y e nenhum da marca Z, num total de R$ 240,00;
- No último dia, não houve vendas da marca X, mas foram vendidos cinco da marca Y e três da marca Z, totalizando R$ 350,00.

Para determinar os preços dos componentes da marca X, Y e Z, respectivamente, resolve-se o sistema dado por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 150 \\ 4 & 3 & 0 & 240 \\ 0 & 5 & 3 & 350 \end{bmatrix}$$

O sistema associado a essa matriz é:

a) $2x + 3y + 4z = 150$, $4x + 0y + 5z = 240$, $x + 2y + z = 350$.

b) $x + y + 2z = 150$, $3y + 4z = 240$, $3x + 5y = 350$

c) $2x + y + z = 150$, $4x + 3y = 240$, $5y + 3y = 350$

d) $2x + y + z = 350$, $4x + 3y = 240$, $5y + 3z = 150$

e) $2x + 4y = 350$, $x + 3y + 5z = 240$, $x + 3z = 350$

10. Observe o sistema linear representado abaixo.

$$\begin{aligned} 4x - y &= -4 \\ 5x - y &= 1 \end{aligned}$$

Qual par ordenado é solução desse sistema?

a) (– 4, 1)

b) (– 3, – 8)

c) (4, – 1)

d) (5, – 1)

e) (5, 24)

11. Uma loja de um shopping montou três bancas para uma promoção, uma de bermudas, uma de camisetas e uma de meias. As peças de cada banca eram vendidas por um mesmo preço.

- No primeiro dia de promoção foram arrecadados, pela manhã, R$ 140,00 com a venda de 1 bermuda, 3 camisetas e 4 meias. A tarde foram arrecadados R$ 200,00 com a venda de 2 bermudas, 4 camisetas e 4 meias. A noite, R$ 280,00 com a venda de 3 bermudas, 5 camisetas e 6 meias.

Qual é o preço de cada camiseta dessa promoção?

a) R$ 10,00
b) R$ 20,00
c) R$ 40,00
d) R$ 50,00
e) R$ 80,00

12. Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$ 5,00, o quilo de castanha de caju, R$ 20,00 e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas. Nesse caso, as quantidades de cada ingrediente por lata são

a) 270 g de amendoim, 125 g de castanha de caju e 105 de castanha-do-pará.
b) 270 g de amendoim, 172,5 g de castanha de caju e 57,5 g de castanha-do-pará.
c) 250 g de amendoim, 125 g de castanha de caju e 125 g de castanha-do-pará.
d) 228 g de amendoim, 100 g de castanha de caju e 72 g de castanha-do-pará.
e) 228 g de amendoim, 120 g de castanha de caju e 135 g de castanha-do-pará.

13. Josefa preparou três tipos distintos de sanduíches usando três ingredientes (A, B e C) em proporções variadas, conforme a tabela 1. Os preços unitários dos ingredientes constam da tabela 2.

	Ingredientes		
Sanduíche	A	B	C
Tipo 1	3	6	1
Tipo 2	4	4	2
Tipo 3	2	3	1

Tabela 1 – Quantidade de ingredientes por tipo de sanduíche.

Ingredientes	**Preço**
A	R$ 1,20
B	R$ 1,80
C	R$ 3,20

Tabela 2 – Preço de cada unidade de ingredientes

A matriz que corresponde aos preços dos sanduíches tipo do 1, 2 e 3 será representada por

a) $\begin{pmatrix} 17,60 \\ 18,40 \\ 11,00 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1,20 \\ 1,80 \\ 3,20 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 10,00 \\ 10,00 \\ 6,00 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 12,00 \\ 18,00 \\ 19,20 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 11,20 \\ 11,80 \\ 9,20 \end{pmatrix}$

14. Considere o sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 11 \\ 4x - 3y + 2z &= 0 \\ 3x + y + z &= 4 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Seja A uma matriz do tipo 3×4 que representa o sistema dado, então a matriz $3 \cdot A$, será representada por:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 22 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 & 22 \\ 8 & -6 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 & 33 \\ 12 & -9 & 6 & 0 \\ 9 & 3 & 3 & 12 \end{bmatrix}$

15. Duas locadoras de automóveis A e B estipulam a remuneração de seus serviços da seguinte maneira:

    - **Locadora A:** valor fixo de R $ 80,00 mais R$ 1,20 por quilometro rodado;
    - **Locadora B:** valor fixo de R $ 120,00 mais R$ 1,00 por quilometro rodado.

    Com base nesses dados, o valor a ser pago às locadoras A e B pelo aluguel de um veículo que rodou 140 km é
    a) R$ 80,00 e R$ 120,00.
    b) R$ 81,00 e R$ 121,20.
    c) R$ 81,20 e R$ 121,00.
    d) R$ 168,00 e R$ 140,00.
    e) R$ 248,00 e R$ 260,00.

3.20 Descritor D_{32} - Teoria e Problemas

O descritor D_{32} está relacionado a resolver problemas de contagem. Umas das áreas mais fascinantes da matemática é o estudo destinado aos métodos de contagem. Enfatizamos que, sempre adotaremos aqui, métodos de contagem em conjuntos finitos. Estes por si só, já apresentam boas aplicações e dificuldades interessantes.

3.20.1 Métodos de Contagem

Consideremos a seguinte situação: **SITUAÇÃO 1:** Jeniffer irá participar da promoção de uma loja de roupas que está dando um vale compras no valor de R$ 1000,00 reais. Ganhará o desafio o primeiro participante que conseguir fazer o maior número de combinações com o kit de roupa cedido pela loja. No kit temos: seis camisetas, quatro saias e dois pares de sapato do tipo salto alto. De quantas maneiras distintas Jeniffer poderá combinar todo o vestuário que esta no kit de roupa?

Em contagem, problemas dos modos descritos na situação acima são resolvidos multiplicando as quantidades que referem a cada escolha realizada. Isto é, Jeniffer poderá combinar as suas roupas de

$$\underbrace{6}_{\text{camisetas}} \times \underbrace{4}_{\text{saias}} \times \underbrace{2}_{\text{sapatos}} = 48 \quad \text{maneiras distintas}$$

O que está por trás da solução é o **Princípio Fundamental da Contagem** ou **Princípio Multiplicativo**, que nos diz formalmente

> Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a pq.

Um outro princípio, também utilizado, é o **Princípio Aditivo** que, formalmente significa:

> Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 ou D_2 é igual a $p + q$.

Exemplo 3.76 *Para um passeio histórico em Bento Gonçalves – RS, é utilizado uma Maria Fumaça (trem) constituído de uma locomotiva e cinco vagões distintos, um dos quais é um vagão-restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes em que a composição pode ser montada é igual a:*

a) 96 b) 120 96 c) 360 96 d) 680 96 e) 400

Resolução 94 *Neste problema, temos que realizar 6 escolhas de posição, ao qual uma delas existe apenas uma possibilidade e as demais possui uma restrição (o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva). Podemos resolver esse problema sem a restrição e, depois, retirar os casos em que a restrição não permite ocorrer. Vejamos como fazer isso: Como os vagões não pode repetir (obviamente), temos*

$$\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}_{vag\tilde{o}es} \times \underbrace{1}_{locomotiva} = \underbrace{120}_{sem\ restri\c{c}\tilde{a}o}$$

Agora, vejamos quantos são os casos em que temos o restaurante logo atrás da locomotiva.

$$\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4}_{vag\tilde{o}es} \times \underbrace{1}_{restaurante} \times \underbrace{1}_{locomotiva} = \underbrace{24}_{restri\c{c}\tilde{a}o}$$

sendo assim, o total de possibilidades que temos é de $120 - 24 = 96$ *(tiramos de todas as possibilidades a restrição).*

Uma outra maneira é iniciar a resolução preenchendo as restrições

$$\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4}_{\textit{vagões}} \times \underbrace{4}_{\textit{4 vagões sem o restaurante}} \times \underbrace{1}_{\textit{locomotiva}} = \underbrace{96}_{\textit{já com a restrição}}$$

O conceito do **fatorial** de um número natural aparece de foma natural (literalmente) em problemas de contagem. resolver problemas que devemos organizar n objetos em n lugares (a quantidade de objetos e de posições coincidem). A cada uma das maneiras de organizar esses objetos a chamamos de *permutação*. Vejamos um exemplo inicial para esse tema:

Exemplo 3.77 *Quatro pessoas, Ana, Bruno, Carlos e Davi chegaram ao mesmo tempo em uma agência bancária que possui apenas um atendente. De quantas maneiras podemos formar uma fila entre eles, determinando assim a ordem em que eles serão atendidos?*

Resolução 95 *A solução é simples,* $4!$ *(quatro fatorial) Whats??? Keep Calm! Usando o PFC, temos*

$$\underbrace{4}_{\textit{1º da fila}} \times \underbrace{3}_{\textit{2º da fila}} \times \underbrace{2}_{\textit{3º da fila}} \times \underbrace{1}_{\textit{4º da fila}} = 24 \quad (\textit{que é } 4!)$$

Dado um número natural n, o produto de todos os naturais de 1 até n é chamado de fatorial de n e é representado, em símbolos, por $n!$ (onde se lê-se n-fatorial). Assim, temos

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 2 \cdot 1$$

Além disso, por convenção, adotamos $0! = 1$.

Agora vamos dar a primeira aplicação de fatorial. O conceito de permutação permite calcular de quantas formas podemos organizar n elementos em n lugares. Mais precisamente, temos

Permutações simples são definidas como maneiras de organizarmos n objetos **distintos** em uma fila. O número total de permutações simples é denotado por P_n e é verificada a igualdade $P_n = n!$

É importante lembrar de que o conceito de permutação simples é constantemente ligado ao de fatorial, mas a recíproca nem sempre é verdadeira! Há outras áreas da matemática que utilizam o fatorial; não somente a Contagem e a Combinatória. Enfatizamos também que, a condição necessária que os objetos sejam todos distintos.

Existe permutação com objetos repetidos, que será o tema de nossa próxima aula. Isto é conhecido na literatura como *Permutação com elementos repetidos*. Agora, vamos para alguns exemplos:

Exemplo 3.78 *Um professor deseja elaborar um teste com 6 questões no google forms. Os enunciados das questões já foram elaborados, mas ele ainda precisa escolher a ordem em que essas questões irão figurar no teste. O google forms possui uma ferramenta para embaralhar as questões de um teste. De quantas maneiras o professor pode organizar o seu teste no google forms?*

Resolução 96 *Desejamos distribuir 6 questões em 6 posições, isto nos fornece a permutação de 6 objetos P_6*

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \quad \textit{maneiras distintas}$$

Podemos também calcular permutação de elementos repetidos. Neste caso, devemos permutamos normalmente e retiramos os casos repetidos. Sendo o processo de contagem das repetições um pouco trabalhoso, podemos usar a fórmula:

Dada a permutação de um conjunto com n elementos tais que alguns elementos repetem α_1 vezes, α_2 vezes, ... , α_k vezes com $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$. Então o número de permutações é dado por

$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_k!}$$

Exemplo 3.79 *Um sapo está sobre uma reta. A cada pulo que ele dá, ele anda exatamente 15 cm para a direita ou 15 cm para a esquerda. Sabe-se que ele deu 10 pulos e retornou à sua posição original. Determine a quantidade de percursos distintos que ele pode ter percorrido.*

Resolução 97 *Note que ele deu 10 pulos e retornou a posição inicial. Isso só ocorre se ele der exatamente 5 pulos para esquerda e 5 pulos para a direita. Se identificamos E por esquerda e D por direita (aqui é nada político), temos que permutar 10 objetos dos quais E repete 5 vezes e D repete 5 vezes. Assim,*

$$P_{10}^{5,5} = \frac{10!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5!} = 252$$

Agora vamos estudar dois tipos de agrupamentos que são distintos por meio de uma palavra **ORDEM**. Os agrupamento, quando a ordem é importante são chamados de **arranjo**, enquanto aqueles agrupamentos ao qual a ordem não importa são chamados de **combinações**. Nosso intuito é primeiramente ver como calcular cada um desses agrupamentos e por fim saber distinguir em algumas situações qual método de contagem usar (arranjo ou combinação).

Em alguns problemas não estamos interessados em permutar todos objetos, mas somente uma parte deles. Nesta seção vamos iniciar o estudo de arranjo que é nada mais que uma permutação de uma quantidade menor de objetos dentro de um conjunto de mais objetos. No estudo das Permutações trabalhamos os casos em que trocamos de posição todos os elementos de uma sequência de objetos qualquer. Um Arranjo será, em geral, uma permutação de apenas uma parte dos objetos dados, onde a **ordem dos mesmos** também influencia na disposição dos elementos.

Considere um conjunto com n elementos distintos. Qualquer sequência de p elementos distintos dos n elementos é chamado de Arranjo. O número de Arranjo de n elementos escolhidos p a p é simbolizado por $A_{n,p}$ e pode ser calculado pela seguinte fórmula

$$A_{n.p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 3.80 *Uma pessoa tem uma caixa com 10 livros guardados e possui uma prateleira onde cabem apenas 4 deles. De quantos modos ela pode escolher 4 dos 10 livros e coloca-los em uma* ***pilha*** *sobre a prateleira?*

Resolução 98 *De fato a ordem da escolha muda a disposição na pilha de livros. Estamos diante de um arranjo. Temos 10 objetos e queremos colocá-los em 4 posições. Assim,* $n = 10$ *e* $p = 4$*. Logo*

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 5040$$

É importante enfatizar que embora os cálculos de arranjos podem ser resolvidos usando PFC é bom definir o arranjo para que o conceito de combinação seja melhor assimilado. Lembremos que até o momento, a ordem da disposição dos objetos foram relevantes para o uso do PFC, permutação e agora arranjo. No que segue, vamos estudar os agrupamentos no qual a ordem de escolha não é relevante. O conceito de combinação está relacionado a capacidade de realizar agrupamento de objetos sem levar em consideração a ordem. Mas o que significa não importar a ordem? Seria basicamente escolher A, B e C ou C, A e B não importar, pois representa os mesmos objetos.

O número de combinações que podemos formar com p elementos de um total de n elementos é dado por $C_{n,p}$ e pode ser calculado por

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

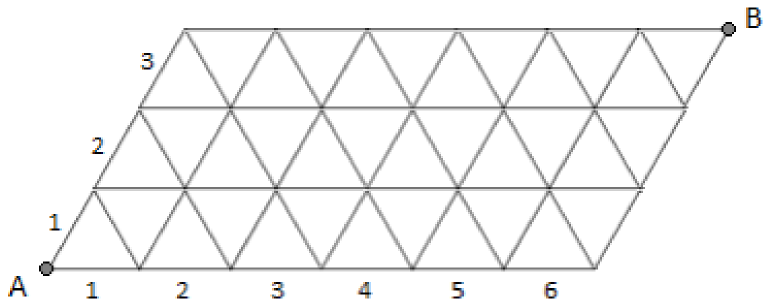
Nesta parte, devemos ter cuidado com as **interpretações** para realizar cálculos em que deverão ser usados um ou mais de um dos cálculos de Permutação, Arranjo e Combinação. Para isso, devemos responder algumas perguntas principais diante das questões que forem surgindo.

- Primeira pergunta: A ordem **importa** ou **não importa**?
- Se a resposta for **sim!** Então
    - Se a quantidade de posições a serem ocupadas pelos objetos é **igual** a quantidade de objetos, então usamos **PERMUTAÇÃO**.
    - Se a quantidade de posições a serem ocupadas pelos objetos é **menor** do que a quantidade de objetos, então usamos **ARRANJO** (PFC)
- Agora, se a resposta for **não**, estaremos num problema de **COMBINAÇÃO**.

Exemplo 3.81 *Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:*
a) Uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) Um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) Um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) Duas combinações.
e) Dois arranjos.

Resolução 99 *O primeiro cálculo de escolha do grupo A não importa a ordem, pois escolhendo os mesmos 4 times em ordem diferente formariam o mesmo grupo. Já a escolha do jogo de abertura, temos que a ordem é importante, pois um será visitante. Logo, temos uma combinação e um arranjo, respectivamente.*

Exemplo 3.82 *O paralelogramo da figura a seguir está dividido em triângulos equiláteros. No caso da figura a seguir, vamos dizer que ele tem 6 triângulos de base e 3 triângulos de altura.*



Uma formiga deseja sair de A e chegar em B, caminhando sobre os lados dos triângulos e percorrendo o menor caminho possível. Quantos caminhos diferentes a formiga pode percorrer?

Resolução 100 *Inciamos observando que, para ir de A para B a formiga de subir 3 vezes e andar horizontalmente 6 vezes. Logo, de 9 lados a serem percorridos, devemos escolher quando ela anda horizontalmente (poderíamos escolher onde ela sobe também, resultado da o mesmo.) Como a ordem dessa escolha não importa, temos um problema de combinação de 9 elementos tomados 6 a 6. Assim,*

$$C_{9,6} = \frac{9!}{6!(9-3)!} = \frac{9!}{6! \times 3!} = 84 \quad \textit{maneiras distintas}$$

Exemplo 3.83 *Dentre um grupo de 7 pessoas, de quantas formas podemos montar uma equipe de 3 pessoas para realizar uma tarefa?*

Resolução 101 *Escolher três pessoas para realizar a tarefa não importa a ordem, pois as três pessoas farão a mesma tarefa. Assim, usamos a combinação:*

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35 \quad \textit{equipes}$$

3.20.2 Problemas Propostos

1. Em uma corrida com 10 atletas competindo pergunta-se: de quantos modos distintos (combinações) podem ser conquistadas as medalhas de Ouro, Prata e Bronze?

   a) 300 b) 720 c) 800 d) 1000 e) 5040

2. Com dois goleiros que só jogam nessa posição e sete jogadores que não jogam no gol, quantos times de futebol de salão podem ser formados, sabendo-se que um time de futebol de salão é composto por cinco jogadores e um desses é o goleiro?

   a) 80 b) 70 c) 90 d) 120 e) 140

3. Na formação de uma Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica um certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Faltam apenas dois partidos para indicar seus

membros. O partido A tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, enquanto o partido B tem 15 deputados e deve indicar 1 membro. Assinale a alternativa que apresenta o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI.

a) 55
b) $(40 - 3) \cdot (15 - 1)$
c) $\frac{40!}{3! \cdot 37!} \cdot 15$
d) $40 \cdot 39 \cdot 37 \cdot 15$
e) $40! \cdot 37! \cdot 15!$

4. Um determinado hospital possui um total de 3 ortopedistas, 2 pediatras, 4 clínicos gerais e 7 enfermeiros para formar as equipes de plantão noturno no setor de emergência. Essas equipes são constituídas por 1 ortopedista, 1 pediatra, 2 clínicos gerais e 4 enfermeiros em cada plantão. Quantas equipes distintas de plantão podem ser formadas contando com esses profissionais?

a) 21
b) 46
c) 168
d) 1 260
e) 60 480

5. Um pintor dispõe de 6 cores diferentes de tinta para pintar uma casa e precisa escolher uma cor para o interior e outra diferente para o exterior, sem fazer nenhuma mistura de tintas. De quantas maneiras diferentes essa casa pode ser pintada usando-se apenas as 6 cores de tinta que ele possui?

a) 6
b) 15
c) 20
d) 30
e) 60

6. Os membros de uma banca examinadora escolheram 7 questões de Matemática, 5 questões de Português e 4 questões de Ciências. Desse grupo de questões, eles irão sortear 2 questões de Matemática, 2 de Português e 1 de Ciências para compor uma prova de um concurso. Quantas provas diferentes poderão ser elaboradas para esse concurso?

a) 140
b) 280
c) 560
d) 700

e) 840

7. Uma classe é formada por 10 alunos. Deseja-se formar uma comissão de três alunos para representação dos discentes na escola. A quantidade de maneiras que poderemos fazer a escolha é:
a) 720 maneiras.
b) 120 maneiras.
c) 30 maneiras.
d) 360 maneiras.
e) 90 maneiras.

8. Sr. Mário ganhou na loteria um carro novo. Na hora de receber o prêmio ficou sabendo que poderia fazer sua escolha entre 4 modelos diferentes: Gol, Fiesta, Pálio ou Corsa e também poderia escolher uma das 6 cores: azul, amarelo, verde, cinza, preto ou vermelho. De quantas maneiras diferentes Sr. Mário poderá escolher o seu carro?
a) 10
b) 24
c) 34
d) 36
e) 64

9. O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?
a) $\frac{10!}{2!\cdot 8!} - \frac{4!}{2!\cdot 2!}$
b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$
c) $\frac{10!}{2!\cdot 8!} - 2$
d) $\frac{6!}{4!} + 4 \cdot 4$
e) $\frac{6!}{4!} + 6 \cdot 4$

10. Ao abrir uma conta de banco, José teve que cadastrar uma senha formada por 4 símbolos: duas vogais distintas e dois algarismos, também distintos, escolhidos dentre os algarismos de 0 a 9. O número total de senhas válidas que José pode formar é
a) 28.
b) 30.
c) 1 800

d) 2250.

e) 2 500.

11. Um restaurante oferece em seu cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. O número de maneiras diferentes para fazer seu pedido é

a) 40

b) 60

c) 80

d) 100

e) 120

12. Uma professora dividiu os alunos de uma turma em 6 equipes para apresentação de seminários. Os seminários serão apresentados de segunda a sábado. Para escolher a equipe e o dia em que o seminário será apresentado, ela utilizou dois dados de seis faces. Um dado identificado com as letras de "m" a "r", correspondente ao nome das equipes, e outro identificado com numerais de 1 a 6, correspondendo aos dias da semana, aos quais o número 1 representa a segunda-feira, o número 2 representa a terça-feira e assim sucessivamente. Qual é o total de possibilidades para esse sorteio?

a) 12

b) 16

c) 24

d) 25

e) 36

13. Em uma rodoviária, 8 pessoas de um grupo aguardam no guichê para comprar passagens de ida para determinada cidade. O atendente do guichê avisa que restam 3 passagens disponíveis para venda e pede às pessoas que escolham, dentre elas, quem comprará essas passagens. Quantos grupos diferentes de três pessoas podem ser formados com essas 8 pessoas para comprar essas passagens restantes?

a) 11

b) 24

c) 56

d) 336

e) 512

14. Uma pizzaria recém inaugurada possibilita a seus clientes a montagem da pizza de sua preferência. Todas as pizzas têm os ingredientes básicos: massa, molho e mussarela. Além disso, têm os seguintes ingredientes opcionais: presunto,

calabresa, frango, lombo, atum, bacon e palmito. O cliente tem direito aos ingredientes básicos e mais 3 opcionais entre os 7 oferecidos. Quantas pizzas diferentes o cliente pode montar nessa pizzaria com todos os ingredientes básicos e escolhendo 3 ingredientes opcionais diferentes?

a) 21
b) 35
c) 126
d) 210
e) 343

15. Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a) 12
b) 18
c) 36
d) 72
e) 108

16. Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais. Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a

a) 5.040.
b) 720.
c) 576.
d) 288.
e) 144

17. Quatro processos, numerados de 1 a 4, deverão ser distribuídos entre três procuradores: Átila, Hércules e Ulisses. Um mesmo procurador pode receber até quatro processos, exceto o procurador Átila, que não pode receber o processo número 2. O número de maneiras diferentes de se fazer tal distribuição é:

a) 81
b) 64
c) 54
d) 11
e) 8

18. Em uma gaveta há 5 pares de meias pretas, 7 pares de meias vermelhas e 10 pares de meias brancas. O número mínimo de pares de meias que precisam ser retirados da gaveta, sem que se veja a cor, para que certamente sejam retirados pelo menos três pares de meias de cores diferentes é
    a) 4.
    b) 15.
    c) 6.
    d) 13.
    e) 18.

19. Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais. Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a
    a) 5.040.
    b) 720.
    c) 576.
    d) 288.
    e) 144.

20. Um técnico judiciário foi incumbido da montagem de um manual referente aos Princípios Fundamentais da Constituição Federal. Sabendo que, excluídas a capa e a contracapa, a numeração das páginas foi feita a partir do número 1 e, ao concluí-la, constatou-se que foram usados 225 algarismos, o total de páginas que foram numeradas é
    a) 97
    b) 99
    c) 111
    d) 117
    e) 126

3.21 Descritor D_{33} - Teoria e Problemas

Nesta seção estudaremos o descritor D_{33}. Tal descritor está relacionado a realizar cálculo de probabilidade. Se no descritor D_{32} realizamos a contagem, neste descritor (D_{33}), estaremos verificando dentro dessa contagem situações que são favoráveis.

3.21.1 Uma breve teoria das probabilidades

A teoria da probabilidade é o ramo da Matemática que estuda experimentos ou fenômenos aleatórios e através dela é possível analisar as chances de um determinado evento ocorrer.

Para calcular as probabilidades passamos pleo estudo de alguns conceitos:

- **Experimento Aleatório** é todo experimento que, mesmo sendo repetido várias vezes, apresenta resultados imprevisíveis dentre os resultados possíveis.
  - Lançamento de um dado, moeda,...
  - Retirar uma carta do baralho, etc
- **Espaço Amostral** de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento: Denotaremos por S este conjunto.
  - Lançamento de um dado; $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Lançamento de uma moeda; $S = \{Cara,\ Coroa\}$.
- **Evento** é todo subconjunto de um espaço amostral S de um experimento aleatório.

Os eventos podem ser classificados de acordo com o experimento aleatório.

- **Evento muito Provável** é aquele evento que possui grande chance de ocorrer
  - Escolher um número menor do que 55 dentre os números de 1 a 60.
- **Evento pouco provável** é aquele que possui pouca chance de ocorrer.
  - Escolher um número primo maior do que 50 entre os números de 1 a 60.
- **Evento certo** é aquele evento que tem 100% de chance de ocorrer.
  - Escolher um número par ou impar dentre os números de 1 a 60.
- **Evento impossível** é aquele que possui 0% de chance de ocorrer.
  - Escolher um número maior do que 60 entre os números de 1 a 60.
- Todo evento que representa um subconjunto unitário o chamamos de **Evento Simples**. O próprio espaço amostral S será considerado uma evento certo e o conjunto vazio $\emptyset$ um evento impossível.

Dizemos que um evento é **equiprovável** se todo elemento do evento possui a mesma probabilidade (chance) de ocorrer:

- Existem eventos que não são equiprováveis. Por exemplo: Quando concorremos uma vaga de emprego o evento é não equiprovável, pois entre dois candidatos a vaga existe uma vantagem a quem possui o melhor currículo.

- O cálculo de probabilidade em eventos não equiprováveis são mais complexos e foge dos esboço de um curso a nível médio.

- Neste sentido, focaremos somente em eventos equiprováveis.

Seja E um evento de um espaço amostral S (não vazio) e seja $n(E)$ e $n(S)$ o número de elementos dos conjuntos E e S, respectivamente. A probabilidade de E ocorrer em S, denotada por $P(E)$ é calculada como

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Devido a fórmula de probabilidade podemos notar que

- $0 \leq P(E) \leq 1$

- $0\% \leq P(E) \leq 100\%$

- Evento impossível indica $P(E) = 0$ ou $P(E) = 0\%$

- Evento certo indica $P(E) = 1$ ou $P(E) = 100\%$.

Informalmente, podemos definir uma probabilidade como

$$P = \frac{\text{O que eu quero}}{\text{O que eu tenho}}$$

ou

$$P = \frac{\text{Número de Casos Favoráveis}}{\text{Número de Casos Possíveis}}$$

Exemplo 3.84 *André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar, lançando as duas moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecerem duas coroas, André lavará a louça; se aparecerem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecerem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:*

a) 25% *b) 27,5%* *c) 30%* *d) 33,3%* *e) 50%*

Resolução 102 *Vamos descrever o espaço amostral (espaço de possibilidades). Notemos primeiramente que uma moeda reserva duas possibilidades {Cara, Coroa}, usando o PFC, temos*

$$\underbrace{2}_{\textbf{1º moeda}} \times \underbrace{2}_{\textbf{2º moeda}} \times = 4$$

O espaço amostral, neste caso, é pequeno e podemos dizer quais são os elementos

$$S = \{(cara, cara);\ (cara, coroa);\ (coroa, cara);\ (coroa, coroa)\}$$

O evento $E =$ João lavar a louça está relacionado a

$$E = \{(cara, coroa);\ (coroa, cara)\}$$

Segue que $N(S) = 4$ (já sabíamos) e $N(E) = 2$. Assim,

$$P(E) = \frac{2}{4} = 0,5 = 50\%$$

Exemplo 3.85 *Em uma urna ha 72 bolas idênticas, más com cores diferentes. Há bolas brancas, vermelhas e pretas. Ao sortearmos uma bola da urna, a probabilidade dela ser branca é 1/4 e a probabilidade dela ser vermelha é 1/3 A diferença entre o número de bolas pretas e o número de bolas brancas na urna é*

a) 12 *b) 10* *c) 8* *d) 6* *e) 4*

Resolução 103 *Note que o espaço amostral S é tal que $N(S) = 72$. Como ao sortearmos uma bola da urna, a probabilidade dela ser branca é 1/4 e a probabilidade dela ser vermelha é 1/3, temos que o número de bolas brancas $N(B)$ é tal que*

$$\frac{N(B)}{72} = \frac{1}{4} \quad \textit{implica que} \quad N(B) = \frac{72}{4} = 18 \textit{ bolas brancas}$$

e o número de bolas vermelhas $N(V)$ é tal que

$$\frac{N(V)}{72} = \frac{1}{3} \quad \textit{implica que} \quad N(V) = \frac{72}{3} = 24 \textit{ bolas vermelhas}$$

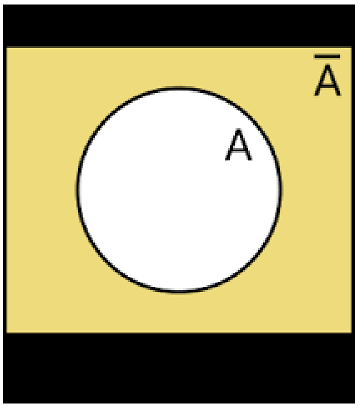
Agora, sendo $N(S) = N(B) + N(V) + N(P) = 72$, temos que o número de bolas pretas é $N(P) = 72 - 18 - 24 = 30$ bolas pretas. A diferença entre o número de bolas pretas e o número de bolas brancas na urna é $30 - 18 = 12$.

Agora, vamos estudar três probabilidades básicas. A primeira delas é a probabilidade complementar. Essa probabilidade é muito usada e facilita o caminho para responder algumas questões. A segunda e terceira probabilidade discutidas nessa aula, estão voltadas para o envolvimento de mais de um evento. Essas probabilidade são: Probabilidade da união de dois eventos e a probabilidade condicional. Elas, são partes fundamentais para a concretização do estudo de probabilidade que finaliza, neste nível, em eventos independentes.

Informalmente

A probabilidade de não ocorrer um evento é igual a 1 menos a probabilidade de que ele ocorra

Essa é formalmente conhecida como a probabilidade do complementar.



Informalmente chamamos essa probabilidade como a probabilidade de dar errado.

Exemplo 3.86 *Uma urna contém 6 bolas verdes, 5 bolas azuis e 4 bolas pretas. Calcule a probabilidade de se extrair uma bola azul ou preta.*

Resolução 104 *Neste caso é mais fácil calcular a probabilidade de se extrair uma bola verde é dela tirar conclusão sobre o que se pede.*

$$P(Verde) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Se são duas chances em cinco de sair verde, então são três chances em cinco de sair azul ou preta. Logo

$$P(azul\ ou\ preta) = \frac{3}{5}$$

A probabilidade da união de dois eventos também é conhecida como a **probabilidade do "ou"**. Vejamos uma situação hipotética:

Exemplo 3.87 *Vamos retirar uma bola de uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Consideremos dois eventos*

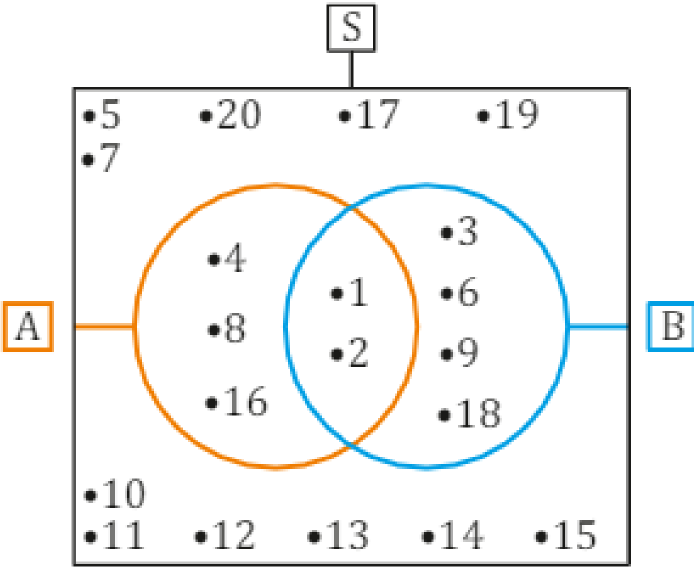
- $A := \{divisor\ de\ 16\}$
- $B := \{divisor\ de\ 18\}$

Neste caso

- $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
- $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

O conjunto $A \cap B$ é definido como os elementos que estão em A e B ao mesmo tempo. Já o conjunto $A \cup B$ é formado pelos elementos que estão em A ou em B. Assim

- $A \cap B = \{1, 2\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 16, 18\}$



A contagem dos elementos de $A \cup B$ pode ser feitas pela fórmula

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Como podemos definir por meio dessa fórmula acima, a probabilidade da união de dois eventos? Naturalmente

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo 3.88 *A probabilidade da união de dois eventos, A e B, é conhecida, sendo igual a 80%, enquanto a probabilidade da união de seus complementares é igual a 70%. Assim, se a probabilidade de A é igual a 40%, então qual o valor da probabilidade de B?*

Resolução 105 *Dado que* $P(A \cup B) = 80\%$, $P(A^c \cup B^c) = 70\%$ *(implica que* $P(A \cap B) = 30\%$, *faça um diagrama para concluir isso.) e* $P(A) = 40\%$, *substituindo esses dados em*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

temos

$$80\% = 40\% + P(B) - 30\%$$

assim , $P(B) = 70\%$

Agora, iremos falar um pouco sobre a **probabilidade condicional**.

Vamos supor que um avião com 150 passageiros sai de São Paulo com destino à Bahia. Durante esse voo, os passageiros responderam duas questões (eventos):

- Já viajou de avião antes? (primeiro evento)
- Já esteve na Bahia? (segundo evento)

O resultado é apresentado na tabela abaixo:

Eventos	Passageiros viajando de avião pela primeira vez	Passageiros que já tinham viajado de avião	Total
Passageiros que não conheciam a Bahia	85	25	110
Passageiros que já conheciam a Bahia	20	10	40
Total	105	35	150

A partir disso, um passageiro que nunca viajou de avião é escolhido. Nesse caso, qual seria a probabilidade desse mesmo passageiro já conhecer a Bahia? Pra responder isso, vamos considerar dois eventos

- $A := \{\text{Passageiro que nunca viajou de avião}\}$
- $B := \{\text{Passageiro ja conhecer a Bahia}\}$

Neste caso, estamos interessados em obter a probabilidade de se obter o evento B dado que o evento A ocorreu primeiro. Isso é, **a probabilidade de B condicionada ao evento A**, que denotaremos por $P(B|A)$, e a calculamos por meio da fórmula

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} \tag{3.5}$$

Chamamos essa probabilidade de **probabilidade condicional**. Podemos também expressar essa fórmula como

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{\frac{n(B \cap A)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \tag{3.6}$$

Voltando ao problema dos passageiros, temos que $N(B \cap A) = 20$ e $n(A) = 105$. Portanto

$$P(B|A) = \frac{20}{105} = \frac{4}{21}$$

Exemplo 3.89 *Em uma turma de alunos do Ensino Médio, sabe-se que 20 deles praticam futebol, 23 praticam basqueste, 8 praticam os dois esportes e 10 não praticam nenhum deles.*
a) Qual a probabilidade de um aluno que pratique futebol ser praticante de basquete?

Resolução 106 *Denotemos por*

- $F = \{praticam\ futebol\}$ *e* $n(F) = 20$
- $B = \{praticam\ basquete\}$ *e* $n(B) = 23$
- $F \cap B = \{praticam\ futebol\ e\ basquete\}$ *e* $n(F \cap B) = 8$
- $(F \cup B)^c = \{não\ praticam\ nenhum\}$ *e* $n((F \cup B)^c) = 10$

A probabilidade de um aluno que pratique futebol ser praticante de basquete é calcular a probabilidade de sair o evento F dado que B ocorreu primeiro, ou seja, a probabilidade condicional $P(F|B)$. Assim

$$P(F|B) = \frac{n(F \cap B)}{n(B)} = \frac{8}{23}$$

b) Qual é a probabilidade de um aluno que pratica basquete ser praticante de futebol?

Resolução 107 *Usando os mesmos itens da questão anteiror*

$$P(B|F) = \frac{n(B \cap F)}{n(F)} = \frac{8}{20}$$

O exemplo anterior, pelo item a) e b) nos mostra que calcular a probabilidade de F condicionada a B e calcular a probabilidade de B condicionada a F dão resultados distintos.

Para finalizar a teoria introdutória de probabilidade, vamos ao assunto **eventos independentes**.

Dois eventos A e B são chamados de independentes se a probabilidade de A ocorrer não é alterada pelo fato de B ocorrer primeiro. Isto é

$$P(A|B) = P(A)$$

é claro que vale

$$P(B|A) = P(B)$$

se dois eventos são independentes, então

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Destacamos aqui duas probabilidades de uso fundamental. Para facilitar podemos usar de uma interpretação direcionada, baseada em dois conectivos **"e"/"ou"**. Consideremos dois eventos A e B, então:

- Probabilidade de A **"e"** B ocorrer é $P(A) \cdot P(B)$.
- Probabilidade de A **"ou"** B ocorrer é $P(A) + P(B)$.

Exemplo 3.90 *Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25 %. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30 % a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região. Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?*
a) 0,075
b) 0,150
c) 0,325
d) 0,600
e) 0,800

Resolução 108 *Queremos calcular a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva. Existe dois casos a considerar*

- **CASO 1:** *Chover* ***e*** *ele atrasar:*

$$P(caso\ 1) = \underbrace{30\%}_{\textbf{chover}} \times \underbrace{50\%}_{\textbf{atrasar}} = \frac{30}{100} \times \frac{50}{100} = 15\%$$

- **CASO 2:** *Não chover e ele atrasar*

$$P(caso\ 2) = \underbrace{70\%}_{\textbf{não chover}} \times \underbrace{25\%}_{\textbf{atrasar}} = \frac{70}{100} \times \frac{25}{100} = 17,5\%$$

Como pode ocorrer o ***caso 1*** *ou o* ***caso 2****, temos que a probabilidade de ele atrasar é dado pela soma das probabilidades calculadas*

$$P(caso\ 1\ ou\ caso\ 2)) = 15\% + 17,5\% = 32,5\% = 0,325$$

Exemplo 3.91 *No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é* *que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30 % e a de chover no domingo é de 25 %. A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de*

a) 5,0 %

b) 7,5 %

c) 22,5 %

d) 30,0 %

e) 75,0 %

Resolução 109 *Para que a aula ocorra no domingo é necessário que chova no sábado e não cova no domingo. Assim essa probabilidade é uma multiplicação de probabilidades.*

$$P = \underbrace{\frac{30}{100}}_{\text{chover no sábado}} \underbrace{\times}_{e} \underbrace{\frac{75}{100}}_{\text{não chover no domingo}} = 22,5\%$$

3.21.2 Problemas Propostos

1. Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 1 O alunos, na B, outros 12 alunos e na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala. Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

   a) $\frac{1}{3}$

   b) $\frac{1}{18}$

   c) $\frac{1}{40}$

   d) $\frac{1}{54}$

   e) $\frac{7}{18}$

2. O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25 % deles eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75 %. Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a

   a) 10.

b) 15.
c) 35.
d) 40.
e) 45.

3. Um professor de Matemática dividiu os alunos de sua turma em 13 grupos diferentes para apresentarem um trabalho. Para determinar a ordem das apresentações dos grupos, ele colocou em uma urna 13 cartões idênticos, numerados de 1 a 13, que foram sorteados aleatoriamente. Qual é a probabilidade do primeiro cartão retirado da urna ser um número maior que 8?
a) 1/13
b) 5/13
c) 6/13
d) 7/13
e) 8/13

4. Caroline ganhou uma caixa de bombons. A caixa contém 7 bombons de caramelo, 5 de coco, 6 de morango e 2 de banana. Ela pegou, sem olhar, um bombom da caixa. A probabilidade desse bombom ser de coco é:
a) 1/20
b) 1/5
c) 5/20
d) 6/20
e) 7/20

5. Na correção de uma prova de matemática de certa classe, 25 alunos tiveram notas acima da média, 10 alunos receberam notas iguais à média e 5 alunos tiveram notas abaixo da média. Após a correção, as provas foram guardadas em um envelope. Retirando-se uma prova desse envelope, ao acaso, a probabilidade de que ela tenha recebido nota igual ou abaixo da média é igual a
a) 1/8
b) 2/8
c) 3/8
d) 5/8
e) 7/8

6. Lucas fez as provas de Matemática, Português, Física, Química e Biologia num mesmo dia. Ele recebeu um envelope com essas 5 provas e, sem olhar, tirou uma prova do envelope. Qual é a probabilidade de Lucas ter tirado a prova de Matemática?
a) 20%.

b) 25%.
c) 50%.
d) 80%.
e) 100%

7. Num acampamento de verão, estão jovens de três nacionalidades: jovens portugueses, espanhóis e italianos. Nenhum dos jovens tem dupla nacionalidade. Metade dos jovens do acampamento são portugueses, e há mais espanhóis do que italianos. Escolhe-se, ao acaso, um dos jovens do acampamento. Qual dos valores seguintes pode ser o valor exato da probabilidade de o jovem escolhido ser espanhol?
a) 25%
b) 30%
c) 50%
d) 60%
e) 70%

8. A professora de Matemática constatou que na realização das tarefas de casa 25 alunos utilizaram apenas o computador, 15 alunos consultaram apenas livros e 5 alunos não fizeram a tarefa de casa. Escolhendo-se ao acaso um desses alunos para resolver o exercício no quadro, a probabilidade de ser escolhido um aluno que não tenha feito a tarefa de casa é de
a) 1/3
b) 1/5
c) 1/6
d) 1/8
e) 1/9

9. Para uma atividade da aula de matemática, a professora trouxe uma caixa com fitas métricas de três cores diferentes: 2 amarelas, 20 azuis, 2 verdes e 15 rosas. Cada aluno vai receber uma fita métrica selecionada ao acaso pela professora, ou seja, a professora vai pegar uma fita dentro da caixa sem olhar a cor e entregar ao aluno. Luiza será a primeira a receber a fita. A cor mais provável da fita que Luiza vai receber é
a) amarela.
b) azul.
c) verde.
d) rosa.

10. Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unica-

mente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de 2/3 e a de acusar a cor vermelha é de 1/3. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos. Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

a) $\frac{10\times 2}{3^{10}}$

b) $\frac{10\times 2^{9}}{3^{10}}$

c) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

d) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

e) $\frac{2}{3^{10}}$

11. Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1 132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves.

    Disponível em: http:www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

    Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

    a) 63,31%

    b) 60,18%

    c) 56,52%

    d) 49,96%

    e) 43,27%

12. Um grupo de 8 pessoas deverá ser disposto, aleatoriamente, em duas equipes de 4 pessoas. Sabendo-se que João e José fazem parte deste grupo, a probabilidade de que eles fiquem na mesma equipe é

    a) inferior a 0,3.

    b) superior a 0,3 e inferior a 0,4.

    c) igual a 0,4.

    d) superior a 0,4 e inferior a 0,45.

    e) superior a 0,45.

13. O número de frutos de uma determinada espécie de planta se distribui de acordo com as probabilidades apresentadas no quadro. A probabilidade de que, em tal planta, existam, pelo menos, dois frutos é igual a

    a) 3%

    b) 7%

    c) 13%

d) 16%

e) 20%

14. Numa cidade com 60.000 domicílios, 35.000 deles têm acesso à internet, 25.000 têm assinatura de TV a cabo, e um terço do número de domicílios não tem acesso a nenhum dos dois recursos. Qual é a probabilidade de um domicílio da cidade, escolhido ao acaso, ter acesso à internet e não ter assinatura de TV a cabo?

a) 1/4

b) 1/12

c) 7/12

d) 3/8

e) 7/8

15. Duas urnas guardam bolas brancas e pretas. Uma das urnas tem 3 bolas brancas e 1 preta enquanto que a outra tem 3 bolas brancas e 3 pretas. Escolhendo-se uma urna ao acaso e em seguida, sucessivamente e com reposição duas de suas bolas, a probabilidade de ocorrer uma branca e uma preta é

a) 7/8

b) 7/16

c) 3/8

d) 7/32

e) 3/16

16. Uma caixa de ferramentas contém 5 martelos, sendo 3 com cabo de madeira e 2 com cabo de borracha. A caixa também contém 7 limas, sendo 3 com cabo de madeira e 4 com cabo de borracha. Retirando-se 2 ferramentas de forma aleatória e sem reposição, a probabilidade de que uma seja martelo com cabo de madeira e a outra uma lima com cabo de borracha é:

a) 2/11

b) 12/35

c) 7/12

d) 1/11

e) 3/11

17. A, B e C são eventos independentes, $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,6$ e $P(C) = 0,5$. A probabilidade de que ao menos um dos três eventos ocorra é:

a) 0,70

b) 0,75

c) 0,80

d) 0,85

e) 0,90

18. Uma rede local de computadores é composta por um servidor e 2 clientes (A e B). registros anteriores indicam que, dos pedidos de certo tipo de processamento, cerca de 30% vêm de A e 70% de B. Se o pedido não for feito de forma adequada, o processamento apresentará erro. Sabe-se que 2% dos pedidos feitos por A e 5% dos feitos por B apresentam erro. Selecionando um pedido ao acaso, a probabilidade dele ser proveniente de A, sabendo que apresentou erro, é:
    a) $5/41$
    b) $6/41$
    c) $3/5$
    d) $2/35$
    e) $1/35$

19. Um lote contém 20 peças das quais 5 são defeituosas. Colhendo-se uma amostra de 2 peças, ao acaso e sem reposição deste lote, a probabilidade de se obter pelo menos uma peça defeituosa é:
    a) $21/38$
    b) $19/38$
    c) $17/38$
    d) $15/38$
    e) $13/38$

Capítulo 4

Tratamento da Informação

O último capítulo deste livro é destinado aos descritores que tratam dos temas relacionados ao tratamento de informação. Assuntos ligados a área da estatística. São dois descritores abordados neste capítulo.

4.1 Descritor D_{34} - Teoria e Problemas

Neste descritor vamos resolver problemas envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos. Traremos um pouco de informações sobre tabelas e gráficos afim de que possamos explorar mais os elementos que abordam esse tema.

4.1.1 Tabelas e Gráficos

Usaremos aqui uma discussão sobre esses elementos por meio da resolução de problemas. Neste material, vamos discutir:

- **Tabelas**
- **Gráfico de segmentos**
- **Gráfico de colunas**
- **Gráfico de setores**

Na próxima aula discutiremos mais sobre gráficos e as suas utilidades.

Diariamente, a todo momento somos bombardeados por diversos tipos de dados. Seja pelos vários veículos de informações ou pelas sinalizações que nos rodeiam. O Enem, destaca pela atenção especial na habilidade de interpretar uma imagem, de ler e traduzir gráficos, na habilidade do tratamento da informação.

TABELAS ESTATÍSTICAS

As tabelas são de fundamental importância para organizar dados. Pode-se arrumar os dados coletados em diversos tipos de tabelas.

Exemplo 4.1 *Uma pesquisa de mercado sobre produtos de higiene e limpeza apresentou o comparativo entre duas marcas, A e B. Esses produtos são concentrados e, para sua utilização, é necessária sua diluição em água. O quadro apresenta a comparação em relação ao preço dos produtos de cada marca e ao rendimento de cada produto em litro.*

Produtos	Preço Marca A	Preço Marca B	Rendimento Marca A	Rendimento Marca B
Sabão líquido concentrado (1 L)	R$ 6,00	R$ 5,10	3 L	2,5 L
Alvejante concentrado (1 L)	R$ 4,50	R$ 3,00	12 L	9 L
Amaciante concentrado (1 L)	R$ 4,50	R$ 5,00	7 L	6 L
Detergente concentrado (1 L)	R$ 1,60	R$ 2,20	3 L	4 L

Um consumidor pretende comprar um litro de cada produto e para isso escolherá a marca com o menor custo em relação ao rendimento. Nessas condições, as marcas dos quatro produtos adquiridos pelo consumidor, na ordem apresentada na tabela, são

a) A,A,A,B b) A,B,A,A c) B,B,B,A d) B,B,B,B e) B,B,A,A

Resolução 110 *O segredo é comparar o rendimento com preço: Dividir preço por rendimento. Por exemplo:*

- *Sabão Líquido*

$$Marca\ A \rightarrow \frac{6}{3} = 2 \text{ reais por litro}$$

$$Marca\ B \rightarrow \frac{5,10}{2,5} > \frac{5}{2,5} = 2 \text{ reais por litro}$$

Assim, para o sabão líquido a escolha deve ser da marca A.

- *Alvejante Concentrado*

$$Marca\ A \rightarrow \frac{4,5}{12} > \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ reais por litro}$$

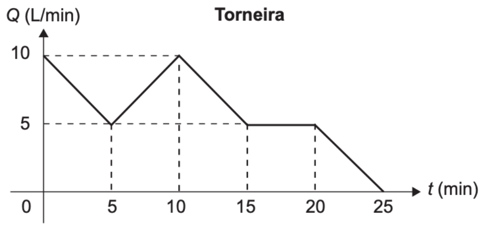
$$Marca\ B \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ reais por litro}$$

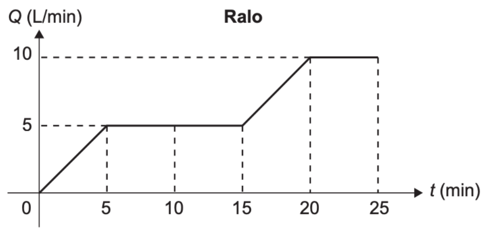
Assim, para o alvejante concentrado a escolha deve ser da marca B. Olhando os itens, obtemos que a escolha correta é a letra b).

GRÁFICOS DE SEGMENTOS

Gráficos de linhas ou pontos são normalmente usados para controlar alterações ao longo do tempo e para facilitar a identificação de tendências ou de anomalias.

Exemplo 4.2 *Um reservatório de água é abastecido por uma torneira ao mesmo tempo que, por um ralo, escoa água de seu interior. Os gráficos representam as vazões Q, em litro por minuto, da torneira e do ralo, em função do tempo t, em minuto.*

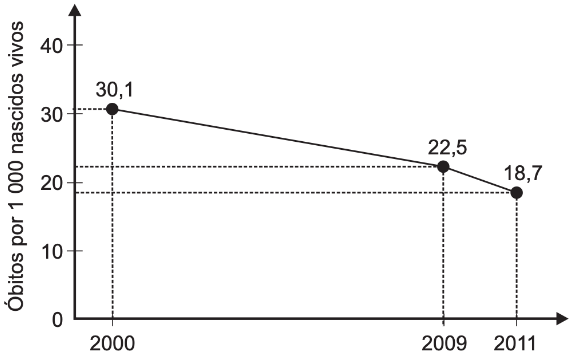




Nos primeiros 25 minutos, o(s) intervalo(s) de tempo em que o volume de água nesse reservatório decresce é(são)
A) entre 15 e 20 minutos.
B) entre 15 e 25 minutos.
C) entre 0 e 5 minutos e entre 15 e 20 minutos.
D) entre 5 e 15 minutos e entre 20 e 25 minutos.
E) entre 0 e 5 minutos, entre 10 e 15 minutos e entre 20 e 25 minutos.

Resolução 111 *Note que o volume do reservatório decresce quando a razão da água que sai pelo ralo é maio do que a razão da água que entra pela torneira. Assim, basta olharmos o dois gráficos e de certa forma imaginar um sobre o outro. Quando o gráfico do ralo fica acima do da torneira é por que sai mais água pelo ralo do que entra pela torneira. Isso ocorre no intervalo de 15 a 25 minutos. Logo a resposta é aletra b).*

Exemplo 4.3 *A taxa de mortalidade infantil vem decaindo a cada ano no Brasil. O gráfico, gerado a partir de dados do IBGE, apresenta a evolução da taxa de mortalidade infantil (número de óbitos para cada 1 000 nascidos vivos) de crianças com até 5 anos, no Brasil, no período de 2000 a 2011.*



Considere que, para os próximos anos, o decréscimo anual médio do número de óbitos para cada 1 000 nascidos vivos registrado, no período de 2009 a 2011, será mantido. A partir das informações fornecidas, a taxa de mortalidade infantil de crianças com até 5 anos tornar-se-á inferior a 10 no período de

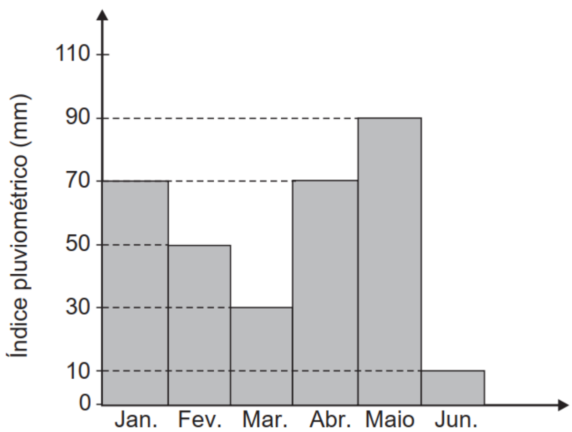
a) 2011 a 2012 b) 2012 a 2013 c) 2013 a 2014 d) 2015 a 2016 e) 2017 a 2018

Resolução 112 *Aqui vou deixar uma dica. Observe que a fala* **o decréscimo anual médio do número de óbitos para cada 1 000 nascidos vivos registrado, no período de 2009 a 2011, será mantido**, *indica que a cada dois anos que se passa o decréscimo é o mesmo que ocorre de 2009 a 2011. Isso permite obter uma que da por ano. Use essa ideia e resolva o problema.*

GRÁFICOS DE COLUNAS

Também conhecido como "Gráfico de Barra", eles são usados para comparar quantidades ou mesmo demostrar valores pontuais de determinado período.

Exemplo 4.4 *O índice pluviométrico é uma medida, em milímetro, que fornece a quantidade de precipitação de chuva num determinado local e num intervalo de tempo (hora, dia, mês e/ou ano). Os valores mensais do índice pluviométrico de uma cidade brasileira, no primeiro semestre, são mostrados no gráfico.*



De acordo com a previsão meteorológica, o índice pluviométrico no mês de julho será igual ao índice do mês de junho somado à variação correspondente ao maior acréscimo, em milímetro, do índice pluviométrico entre dois meses consecutivos do semestre *apresentado. O índice pluviométrico, em milímetro, previsto para o mês de julho, na cidade considerada, será igual a*

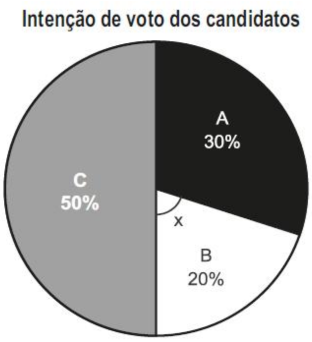
a) 30 *b) 50* *c) 70* *d) 80* *e) 90*

Resolução 113 *Problema é bem simples. O aumento maior em meses consecutivos ocorre de março para abril. Tome essa diferença e adiciona ao mês de junho.*

GRÁFICOS DE SETORES OU GRÁFICOS DE PIZZA

Gráfico de setores ou gráfico circular, como é tradicionalmente chamado gráfico de pizza é um diagrama circular em que os valores de cada categoria estatística representada são proporcionais às respectivas medidas dos ângulos.

Exemplo 4.5 *Em uma eleição estão concorrendo os candidatos A, B e C. Realizada uma pesquisa de intenção de voto com 1.000 eleitores, obteve-se o seguinte resultado, ilustrado no gráfico de setores a seguir.*



O valor do ângulo x do gráfico de setores é

a) 18 graus

b) 36 graus

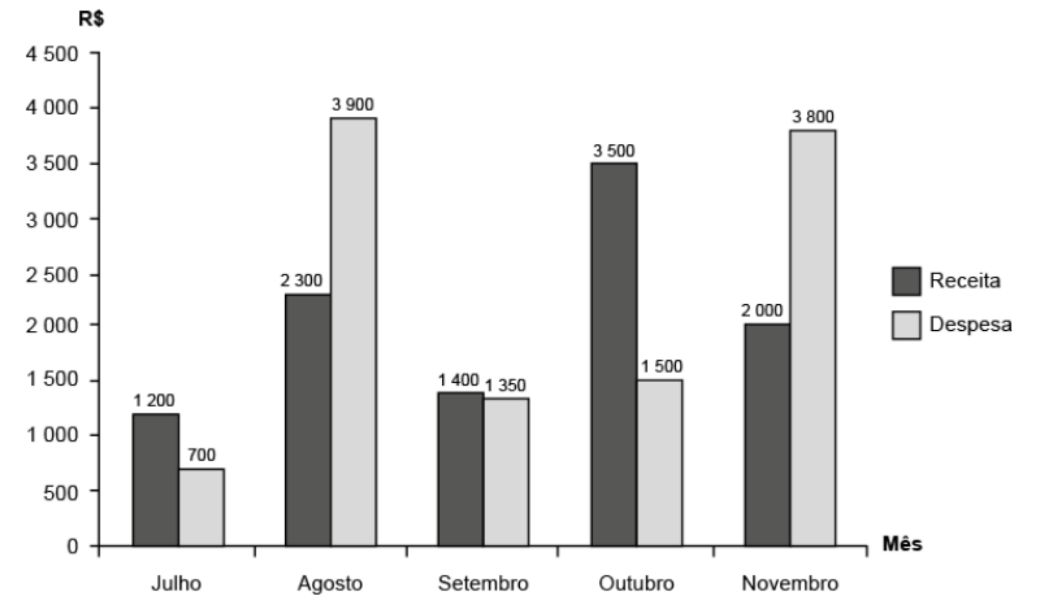
c) 60 graus

d) 72 graus

Resolução 114 *Note que 50% é meia volta, portanto 180°. Assim, 10% equivale a quinta parte de 180° que é 36°. Logo, 20% equivalem a* $2\times$ *36°=72°.*

4.1.2 Problemas Propostos

1. O gráfico mostra as receitas e as despesas de uma empresa nos meses de julho a novembro de um ano. O resultado financeiro, obtido pela diferença entre receita e despesa, pode ser positivo (lucro) ou negativo (prejuízo).



Sabendo que o mês de dezembro é, em geral, de melhores vendas, o dono da empresa faz uma previsão de que a receita naquele mês terá um aumento, em relação ao mês anterior, com a mesma taxa de crescimento ocorrida de setembro para outubro, e que a despesa irá se manter a mesma de novembro. Se confirmadas as previsões do dono da empresa, o resultado financeiro a ser obtido no semestre de julho a dezembro será um

A) prejuízo de R$ 2 650,00.

B) prejuízo de R$ 850,00.

C) lucro de R$ 7 150,00.

D) lucro de R$ 5 950,00.

E) lucro de R$ 350,00.

2. Ao fazer anotações sobre o seu orçamento mensal o Sr. Pereira montou a tabela abaixo.

NATUREZA DAS DESPESAS	VALOR (em reais)
Alimentação	800
Aluguel	480
Transporte	320
Saúde	560

Quanto o Sr. Pereira gasta com aluguel e transporte?

a) R$ 160,00

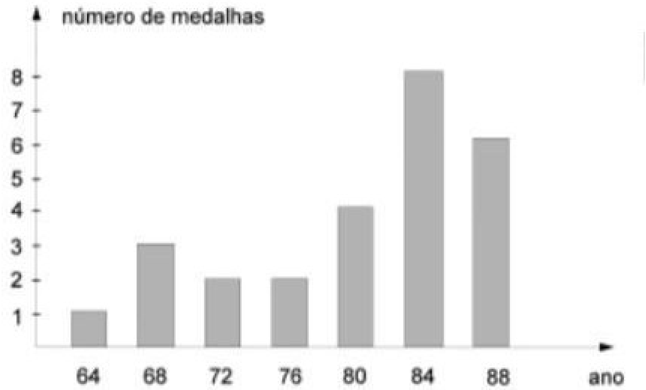
b) R$ 320,00

c) R$ 480,00

d) R$ 800,00

e) R$ 880,00

3. O gráfico abaixo mostra o número de medalhas conquistadas pelo Brasil nas olimpíadas de 1964 a 1988. Em média, por olimpíada, nesse período, o Brasil ganhou, aproximadamente:



a) 4 medalhas

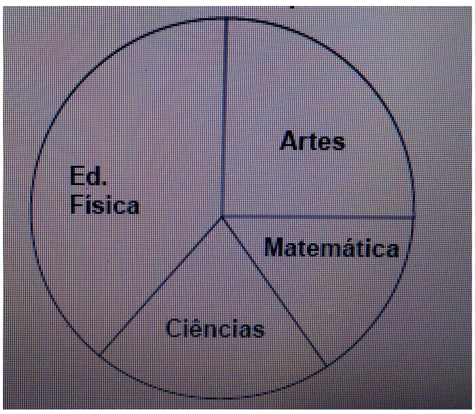
b) 6 medalhas

c) 7 medalhas

d) 8 medalhas

e) 9 medalhas

4. Os 360 alunos da escola foram entrevistados sobre a matéria que mais gostam. As matérias escolhidas foram: Artes, Educação Física, Matemática e Ciências. Analisando as respostas dos alunos, representadas no gráfico de setores abaixo, você pode dizer que:



a) A maioria escolheu Matemática.

b) Matemática é mais popular que Artes.

c) Aproximadamente 200 alunos escolheram Educação Física.

d) Aproximadamente 90 alunos escolheram Artes.

e) Aproximadamente 100 alunos escolheram Matemática.

5. A tabela abaixo apresenta a quantidade de vitaminas do tipo A, B1 e B2 em cada porção de 100 gramas de algumas frutas.

Frutas (100 g)	Vitamina A (mcg)	Vitamina B1 (mcg)	Vitamina B2 (mcg)
Abacaxi	5	80	128
Banana	10	92	103
Maçã	4	45	100
Graviola	2	100	50
Abacate	20	70	100
Melancia	23	20	30
Mangaba	30	40	40

ttp://www.ebah.com.br/content/ABAAAesJ0AB/frutas-hortalicas#>. Acesso em: 13 jul. 2017. * Adaptado para

De acordo com essa tabela, a variação máxima das quantidades de vitamina A, B1 e B2 nessas frutas são, respectivamente,

a) 2 mcg, 20 mcg e 30 mcg.

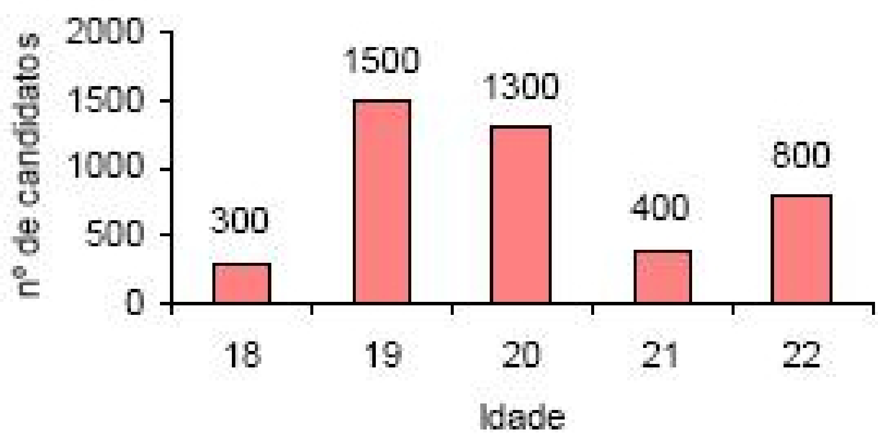
b) 7 mcg, 8 mcg e 25 mcg.

c) 25 mcg, 40 mcg e 88 mcg.

d) 28 mcg, 80 mcg e 98 mcg.

e) 30 mcg, 100 mcg e 128 mcg.

6. Observe o gráfico que indica o número de candidatos inscritos num concurso público, em função de sua idade.



Com base nesses dados, é correto afirmar que:

a) a maioria dos candidatos tem 20 anos.

b) em maio venderam-se menos carros do que em agosto.

c) julho foi o mês no qual se venderam menos carros.

d) agosto foi o mês no qual se venderam mais carros.

e) junho foi o mês vendeu mais de 150 carros.

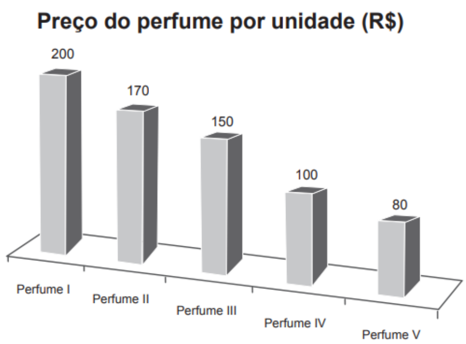
7. Um comerciante visita um centro de vendas para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar. Verifica que se aproveita 100% da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90% de produtos do tipo B. Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor custo/benefício em cada um deles. O quadro mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado.

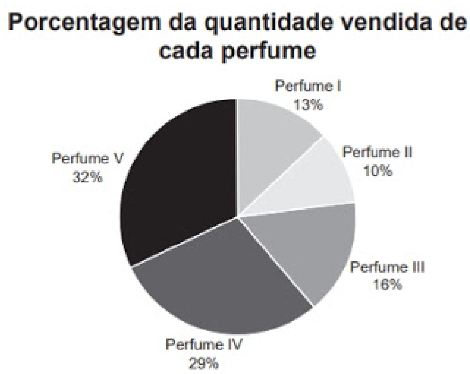
Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente,

a) A,A,A,A b) A,B,A,B c) A,B,B,A d) B,B,B,B e) B,A,A,B

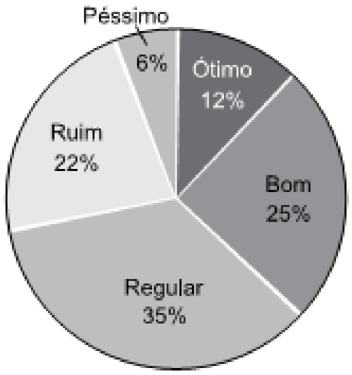
8. O gerente de uma loja de cosméticos colocou à venda cinco diferentes tipos de perfume, tendo em estoque na loja as mesmas quantidades de cada um deles. O setor de controle de estoque encaminhou ao gerente registros gráficos descrevendo os preços unitários de cada perfume, em real, e a quantidade vendida de cada um deles, em percentual, ocorrida no mês de novembro





Dados a chegada do final de ano e o aumento das vendas, a gerência pretende aumentar a quantidade estocada do perfume do tipo que gerou a maior arrecadação em espécie, em real, no mês de novembro. Nessas condições, qual o tipo de perfume que deverá ter maior reposição no estoque?

a) I b) II c) III d) IV e) V O gráfico de setores mostra a distribuição percentual do resultado de uma pesquisa qualitativa feita para determinado produto, na qual cada entrevistado deveria optar apenas por um dos seguintes conceitos: Ótimo – Bom – Regular – Ruim – Péssimo.



A medida, em graus, do ângulo central do setor que representa o conceito Regular é

A) 90°

B) 108°.

C) 120°.

D) 126°.

E) 130°.

9. A tabela abaixo relaciona as matrículas das crianças de 0 a 7 anos nas instituições estaduais de ensino nas 5 sub-regiões de um determinado estado, no ano de 2010.

Regiões	Matrículas por idade		
	6 a 7 anos	4 a 5 anos	0 a 3 anos
I	1 004	1 224	1 188
II	259	301	334
III	1 410	1 615	1 674
IV	1 617	3 993	2 802
V	1 561	1 884	1 267

Disponível em: <https://goo.gl/2IA7vu>. Acesso em: 5 jul. 2015. *Adaptado para fins didáticos.

De acordo com os dados dessa tabela, as duas regiões que apresentaram a maior quantidade de crianças de 0 a 7 anos matriculadas em instituições estaduais de ensino foram

a) I e II.

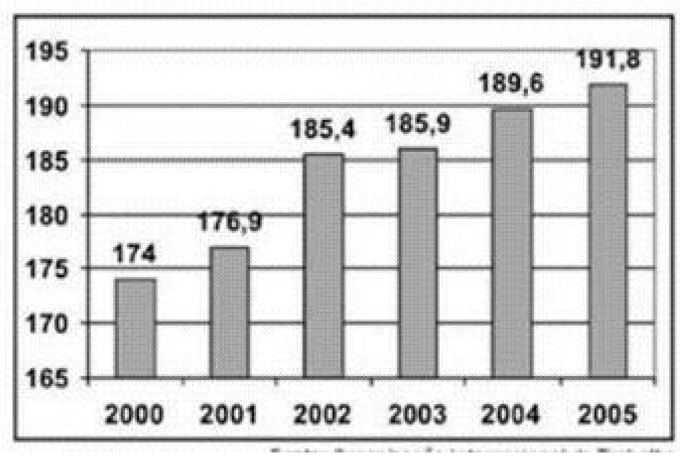
b) II e IV.

c) III e IV.

d) III e V.

e) IV e V.

10. O gráfico abaixo mostra o número de desempregados no mundo, em milhões de pessoas, no período de 2000 a 2005.



Com base nesse gráfico, observa-se que a quantidade de pessoas sem trabalho no mundo

a) permaneceu a mesma entre 2000 e 2001.

b) permaneceu a mesma desde o ano de 2002.

c) aumentou de 8,5 milhões entre 2001 e 2002.

d) aumentou de 19 milhões entre 2001 e 2003.

e) diminuiu entre 2000 e 2002.

4.2 Descritor D_{35} - Teoria e Problemas

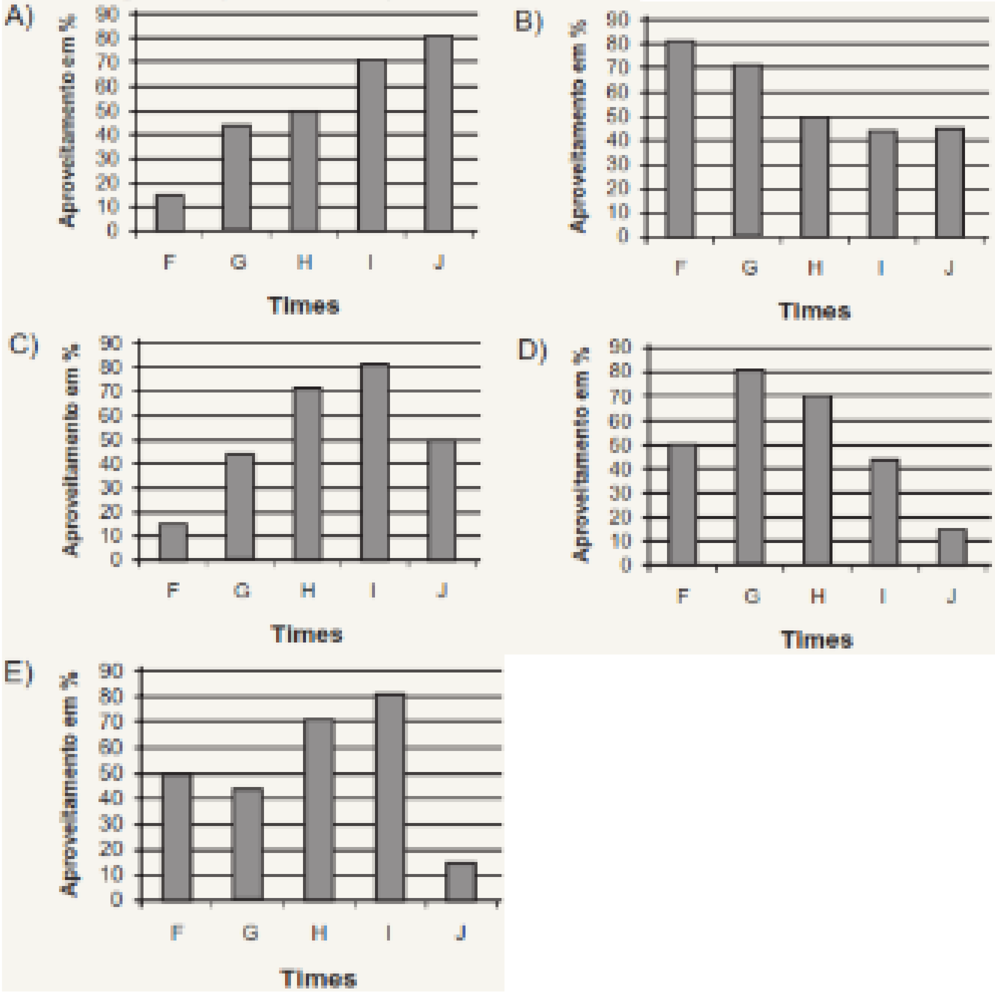
O descritor D_{35} está relacionado a associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa. Como já abordamos problemas semelhantes no descritor D_{34} não traremos uma teoria associada.

4.2.1 Problemas Propostos

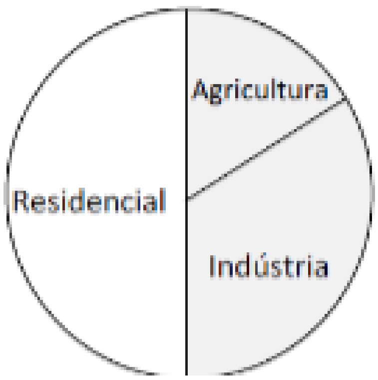
1. Na tabela abaixo foram registradas a porcentagem de aproveitamento de cinco times nos jogos de um campeonato de futebol.

Times	Aproveitamento em %
F	15
G	44
H	71
I	81
J	50

Qual é o gráfico que melhor representa esta tabela?



2. Para uma campanha de uso racional da água, a prefeitura de "Terra Branca" anotou o consumo de água por setor em um mês e obteve o gráfico abaixo.



O quadro que melhor corresponde a esse gráfico, em que o consumo de água está representado em milhões de m 3 por mês, é

A)

Atividade	Indústria	Agricultura	Residencial
Consumo	500	300	200

B)

Atividade	Indústria	Agricultura	Residencial
Consumo	500	200	300

C)

Atividade	Indústria	Agricultura	Residencial
Consumo	300	200	500

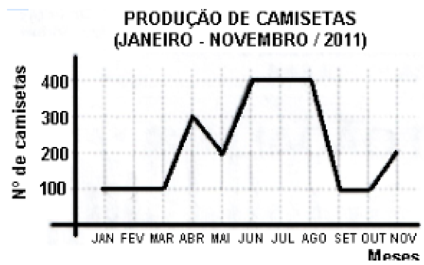
D)

Atividade	Indústria	Agricultura	Residencial
Consumo	300	500	200

E)

Atividade	Indústria	Agricultura	Residencial
Consumo	200	300	500

3. O gráfico abaixo representa a produção de camisetas em determinada empresa no período entre o dia 1º de janeiro à 30 de novembro de 2010.



Das alternativas a seguir, a que representa corretamente as informações do gráfico é

(A)

Mês	Produção
JAN	0
MAR	100
MAI	200
JUL	400
SET	100

(B)

Mês	Produção
FEV	100
ABR	300
JUN	400
AGO	300
OUT	100

(C)

Mês	Produção
JAN	100
FEV	100
MAI	100
AGO	400
NOV	200

(D)

Mês	Produção
JAN	100
MAR	100
MAI	200
JUL	400
NOV	200

(E)

Mês	Produção
JAN	0
ABR	300
JUL	400
OUT	100
NOV	200

Referências Bibliográficas

[1] https://profwarles.blogspot.com/

[2] https://www.todamateria.com.br/

[3] http://enemex-matematica.com.br/

[4] https://www.aprendermaisinovacao.go.gov.br/

[5] Siva, J. S. *Notas de aulas de matemática*, Cepmg Dr. César Toledo. 2020 - 2021.